

Examen partiel
mercredi 8 mars 2023
8H - 9H30

Ni les documents, ni les téléphones ni les calculatrices ne sont autorisés.

Exercice 1 a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_3 \in \mathbb{Q}[X]$ de degré ≤ 3 tel que

$$P_3(1) = 1, P_3(2) = 5, P_3(3) = 14, P_3(4) = 30$$

et le trouver.

- b) Vérifier que $\forall n = 1, 2, 3, P_3(n+1) - P_3(n) = (n+1)^2$. Cette égalité est-elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$? *Justifier.*
- c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_3(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

Exercice 2 Pour chacune des listes de fonctions suivantes, dire si elle est libre ou liée dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions réelles définies sur l'intervalle indiqué.

- a) $|x+1|, |x+2|, |x+3|$ sur $\mathbb{R}$;
- b) $(x+1)^2, (x+2)^2, (x+3)^2$ sur $\mathbb{R}$;
- c) $\cos(x+1), \cos(x+2), \cos(x+3)$ sur $\mathbb{R}$;
- d) $\ln(x+1), \ln(x+2), \ln(x+3)$, sur $\mathbb{R}_{>0}$. *Indication. Dans ce cas on pourra par exemple dériver ...*

Exercice 3 Soient les vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^4$.

$$v_1 = (1, 4, 7, 10), v_2 = (2, 5, 8, 11), v_3 = (3, 6, 9, 12),$$

$$v_4 = (1, 0, 1, 1), v_5 = (1, 1, 0, 1), v_6 = (1, 1, 1, 0) .$$

On pose $F = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$, $G = \text{Vect}\{v_4, v_5, v_6\}$.

- a) Déterminer $\dim F$, $\dim G$ et donner une base de F et une base de G .
- b) Déterminer $\dim(F \cap G)$ et donner une base de $F \cap G$.
- c) En déduire $\dim(F + G)$ et donner une base de $F + G$.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z, 7x + 8y + 9z)$.

Soient

$$v_1 = (1, -2, 1), v_2 = (2, 1, 1), v_3 = (1, -3, 1) .$$

- a) Quelle est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?
- b) Donner une base de $\ker f$. En déduire le rang de f .
- c) Donner une base de $\operatorname{im} f$. L'application f est-elle injective? Surjective? *Justifier*.
- d) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
- e) Donner la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3) .