Transformée de Fourier printemps 2023

La transformée de Fourier d’une fonction absolument intégrable est ici donnée par

1.

La fonction est appelé sinus cardinal. Soit la fonction indicatrice de .

1. Calculer la transformation de Fourier de
2. Déterminer .
3. Déterminer .
4. Calculer la transformée de Fourier de la fonction triangle définie par
5. Déterminer
6. Rappel de cours

D’après la question, avec .

Donc

Par conséquent

Car est paire.

Puis pour

1. Rappel de cours, théorème de Plancherel

On pose

1. D’après le TD sur les produits de convolution

Cette dernière fonction est la fonction triangle de l’énoncé.

Rappel de cours

On l’applique à

On réutilise la première question avec

Alors

Deuxième méthode

A l’aide d’une intégration par parties

En faisant le changement de variable ,

1. A l’aide du changement de variable donc et les bornes ne changent pas

D’autre part d’après la question 4.

Où , c’est-à-dire la fonction triangle.

La formule d’inversion donne

Donc en l’appliquant à

La fonction est paire donc , à vérifier au moins graphiquement.

Par conséquent

Autre méthode avec le théorème de Plancherel appliqué à la fonction

Comme à la première méthode

Donc

Car est paire

Par conséquent

1. Soit la fonction de Heavyside.
2. Calculer la transformée de Fourier de avec .
3. Calculer la transformée de Fourier de avec .
4. Calculer la transformée de Fourier de avec .
5.

Par parties en dérivant «  » et en intégrant «  »

1. On note

On a la valeur de d’après la première question,

Pour tout , toujours en intégrant par parties

Par récurrence on montre que :

On passe sur les détails de la récurrence, donc pour .

1.

Avec dans la première intégrale

1. On cherche une solution de l’équation de l’équation différentielle
2. Montrer que, si est solution alors satisfait
3. En déduire .

Révision TD 1 (indépendant du reste de l’exercice) : retrouver directement à partir de la formule que vous venez d’obtenir pour qu’elle est deux fois dérivable au voisinage de .

1. Donner toutes les solutions de . Pourquoi est-elle la seule solution de à laquelle aboutit naturellement la procédure précédente (formelle en général) ?

Comme , on a . Il faut trouver

On fait le changement de variable dans la première intégrale

Donc

On en conclut que

Puis on calcule

Ou alors il existe et réels tels que

On multiplie par , puis

Donc et

On prend

On multiplie par , puis

1. Première méthode

Comme on vient de voir que :

On fait le changement de variable donc et , les bornes ne changent pas

On en déduit que :

Ce qui entraine que

Donc est continue

Si alors et

Si alors et

Ce qui montre que est dérivable en , donc que est deux fois dérivable en

Pour est évidement deux fois dérivable.

1. On a trouvé une solution particulière de l’équation différentielle, la solution générale de l’équation homogène est :

Donc la solution générale est

Mais après quelques petites vérifications faciles si note et car et

Donc les solutions de l’équation n’apparaissent pas avec cette procédure.

1.

Soit et (absolument intégrable)

1. Quelle est la transformée de Fourier de (en terme de la transformée de Fourier de ).
2. Tracer le graphe de la transformée de Fourier de .
3. Soient et (absolument intégrable).
4. On pose
5. On pose et
6.

Calculer la transformée de Fourier de avec .

Indication : on pourra utiliser .

On fait le changement de variable donc et les bornes s’inversent

Puis le changement de variable

D’après l’exercice1.

Donc