Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI UE Math 4

Année 2022-2023

Printemps 2023

Fiche de TD 1-Relations de comparaison

1.
2. Soit . Dire si pour
3. Calculer un équivalent et les limites suivantes quand .
4. Donner un équivalent quand de
5.

On rappelle que si

1.

Mais on n’a pas

1. Calculer les limites suivantes :
2.

Pour la première limite

Par croissance comparée.

Pour la seconde limite

Pour la troisième limite

Donc

1.

Relations de comparaison. Donner un équivalent quand de

1.

Attention à la somme et la différence d’équivalents

Le raisonnement suivant est faux

Donc . Cela ne va pas du tout

On peut faire comme suit :

Si on fait un développement limité à l’ordre de cela coince voir ci-dessous

Ce qui pose problème parce que n’est pas forcément équivalent à à cause du , par exemple , ce qui montre que dans le il peut y avoir une partie en .

1. Donner un équivalent simple des fonctions suivantes lorsque et
2.

La correction est un peu expéditive, mais pour vérifier il suffit de calculer la limite de par l’équivalent proposé (en puis en ) et vérifier qu’elle vaut bien .

1.
2. , il n’y a pas d’équivalent plus simple en
3. Etudiez la limite de quand .
4. ,
5. , .
6. , .
7. , .
8. , .
9.
10. On pose donc
11. Attention on ne peut pas faire de somme ou de différence d’équivalents.

Donc

1.
2. On pose et donc
3. Calculer les limites suivantes (sans présupposer leur existence!).

On vérifiera à chaque fois qu’il s’agit de forme indéterminée. La technique est plus ou moins toujours pareil, on calcul un développement du dénominateur à un ordre tel que le coefficient devant le premier terme du développement limité est non nul, puis on fait un développement limité au même ordre du numérateur (il se peut qu’un ordre inférieur suffise)

1. , donc un développement limité à l’ordre (à l’ordre cela aurait été insuffisant)

Alors

1. est un développement limité dont le premier terme non nul est , il suffit de faire un développement limité de à l’ordre

Avec

Ici, il fallait faire un développement limité de à l’ordre , à un ordre inférieur, on ne pouvait pas conclure.

Il faut trouver la limite de en .

Avec , donc

1. En reprenant le calcul du e) en changeant en , puis en
2.

Là on ne sait pas trop à quel ordre faire le développement limité de , et à postériori celui de , alors il faut se lancer, à l’ordre cela parait un peu juste , cela n’ira pas, à l’ordre , entraine que (en allant vite), alors c’est mal parti pour un développement limité de , alors on tente un développement limité de à l’ordre .

Donc

Avec et en allant un peu plus vite que d’habitude. Alors

1.
2. Ce n’est pas le même exercice que le 5 car , on pose lorsque

Donc

Par croissance comparée.

Mais est toujours une forme indéterminée lorsque tend vers .

Donc

Finalement

1.

Calculer un développement limité de la fonction pour chacun des cas suivants :

1. où tend vers et à l’ordre .
2. au voisinage de et à l’ordre .
3. où tend vers et à l’ordre .
4. où tend vers et à l’ordre .
5. où tend vers et à l’ordre .
6. quand avec trois termes significatifs.
7. Ne pas faire l’erreur classique suivante avec car ce lorsque donc on ne peut pas appliquer la formule

Avec , donc

1. On pose , donc

Avec

Par conséquent

1. On pose , donc

Le développement limité de à l’ordre est

Le développement limité de à l’ordre est

Et surtout on ne développe pas, cette formule n’a d’intérêt que pour .

1. Ne pas faire l’erreur classique suivante avec car ce lorsque donc on ne peut pas appliquer la formule

Avec , donc

1. Première méthode

On pose , donc

Et on ne développe surtout pas.

Deuxième méthode avec la formule de Taylor

1. On pose , donc lorsque

Puis on fait un développement limités en à l’ordre de avec

Ce qui entraine que et que

On en déduit que

Ce qui donne, non pas mais termes significatifs, il faut enlever le dernier termes

 Mais si on avait fait un développement limité de à l’ordre , c’est-à-dire

On n’aurait trouvé que termes significatifs. C’est un peu compliqué je sais.

1.

Déterminer pour chacune des fonctions proposées ci-dessous un développement quand à la précision demandée.

1. avec une précision de .
2. avec une précision de .
3. avec une précision de .
4. avec une précision de .
5. avec une précision de .
6. avec une précision de .
7. avec une précision de .
8. avec une précision de .
9. avec une précision de .
10.
11. .

Le problème ici, c’est que les développements limités de et de commencent tous les deux par «  » donc le quotient va se simplifier par , il faut faire des développements limités de et de à un ordre supérieur de (donc pour obtenir un développement limité à l’ordre ). Mais les permettent de gagner un ordre

Première méthode : division suivant les puissances croissantes

|  |  |
| --- | --- |
|   |   |
|   |   |
|   |  |
|   |  |
|   |  |
|   |  |
|   |  |

Donc

Deuxième méthode

On va donc chercher le développement à l’ordre de

Avec

1. On ne peut pas appliquer la formule avec car pour appliquer cette formule il faut que soit une constante.

Il faut faire un développement de avec une précision de , mais comme dans l’exercice précédent il va y avoir une simplification par «  » donc on va faire un développement de à l’ordre .

Donc

On ne peut pas poser et appliquer la formule de car ce lorsque

Avec

Remarque le terme ne sert à rien puisque le développement limité de commence par .

1.