Outils (plus ou moins) nouveaux essentiels

1. Intégrales et convergence absolue (révisions).
2. Intégrales impropres.
3. Intégrales à paramètre.
4. Décomposition en éléments simples (révisions).
5. Transformée de Laplace.
6. Produit de convolution.
7. Transformée de Fourier.

Intégrales et convergence absolue.

Ici et dans la suite, toutes les fonctions sont supposées continues par morceaux. Lorsque nous intégrons une fonction f sur un intervalle I, on a deux situations possibles :

- Si $\int_I |f|$ est finie (l'intégrale converge absolument, alors $\int_I f$ est bien définie.
- Si $\int_I |f|$ est infinie, il faut voir dans quelles situations nous pouvons quand même donner un sens à $\int_I f$.

Intégrales impropres.

Regardons une fonction f définie sur un intervalle ouvert I. Si f et I sont bornés, tout va bien. Il y a deux types de soucis possibles :

- f n'est pas bornée près de (au moins) une des bornes de l'intervalle.
- L'intervalle lui-même n'est pas borné.

Dans les 2 cas, il faut approcher les bornes de I et regarder la limite (s'il y a un souci à chaque borne, on coupe au milieu et on regarde chaque limite séparément).

Exemples :

$$\int_0^1 \ln(x+x^2); \int_0^{+\infty} \sin(x)/x \; dx.$$

On regarde :

$$f(p) := \int_I F(p,x)\ dx.$$

Sous des hypothèses de domination sur F uniformément en p par une fonction absolument intégrable sur I, on obtient que f est (au moins) aussi régulière que F.

Décomposition en éléments simples (révisions).

Formules longues à écrire, en particulier si décompositions réelles...mais dans tous les cas, si le dénominateur est de degré n, alors il y a un système avec n équations et n inconnues.

Exemples :

$$\frac{X}{(X^2-1)^2};\ \frac{X}{X^2+2X+2}.$$

Transformée de Laplace.

Il s'agit d'une l'intégrale à paramètre :

$$L[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx.$$

Les formulations sont un peu longues, mais en tout cas vous pouvez le calculer pour $p > A$ si $f(x) = O(e^{Ax})$ à l'infini.

Exemples pour trouver $L[f](p)$:

$$f(x) = e^x; \; f(x) = \cos(x).$$

Exemples pour trouver f(x) en partant d'une fraction rationnelle :

$$L[f](p) = \frac{2}{p^2+1}; \; L[f](p) = \frac{2}{p^2-1}.$$

Transformée de Fourier.

Il s'agit encore une fois d'une intégrale à paramètre :

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} f(x) dx.$$

Par rapport à la transformée de Laplace, il y a un i en plus et on a changé les bornes.
C'est un objet compliqué, mais en tout cas vous pouvez le calculer si f est absolument intégrable.
Exemples pour trouver $\hat{f}(p)$:

$$f(x) = e^{-|x|}; \; f(x) = x 1_{[-1,1]}(x).$$

Merci de votre attention !