

Cours 5. Rappels EDO et équation des ondes.

Mathématiques 4

5 février 2024

Équation des ondes : séries de Fourier

On considère l'équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants avec second membre

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = f$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application. On lui associe l'équation homogène (sans second membre)

$$(EH) \quad ay'' + by' + cy = 0.$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée (EH) est un espace vectoriel de dimension 2.

Pour résoudre l'équation (E) , on calcule une solution particulière y_0 de (E) et on résout l'équation homogène associée (EH) .

Si y_{EH} est la solution générale de (EH) alors la solution générale de (E) est

$$y_E = y_{EH} + y_0.$$

Pour résoudre l'équation homogène (EH) on associe l'équation caractéristique

$$(EC) \quad ar^2 + br + c = 0.$$

- Si $\Delta > 0$ alors (EC) admet deux solutions réelles r_1, r_2 . Dans ce cas les fonctions

$$e^{r_1 x}, e^{r_2 x}$$

constituent une base de l'espace vectoriel des solutions de (EH) et donc la solution générale de (EH) est

$$y_{EH}(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

- Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique (EC) admet une racine réelle double r . Dans ce cas les fonctions

$$xe^{rx}, e^{rx}$$

constituent une base de l'espace vectoriel des solutions de (EH) et donc la solution générale de (EH) est

$$y_{EH}(x) = C_1 e^{rx} x + C_2 e^{rx}$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique (EC) admet deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$. Dans ce cas les fonctions

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

constituent une base de l'espace vectoriel des solutions de (EH) et donc la solution générale de (EH) est

$$y_{EH}(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Exercice

Calculer les solutions 2-périodiques de l'équation des ondes

$$(EO) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(x, t) = u(x + 2, t), \end{cases}$$

avec

$$u_0(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1], \\ 2 - x & \text{si } x \in [1, 2], \end{cases}$$

et $u_1(x) = 0$.

On cherche d'abord les développements en série de Fourier des fonctions u_0 et u_1 . Comme u_1 est identiquement nulle son développement en série de Fourier est nul.

On calcule donc le développement en série de Fourier de u_0 (en toute rigueur celui de la fonction \bar{u}_0 définie sur \mathbb{R} , 2-périodique et qui coïncide avec u_0 sur $[0, 2]$).

La fonction \bar{u}_0 étant alors paire on a $b_n = 0$, reste donc à calculer a_n . On a ($T = 2 = \frac{2\pi}{\omega}$)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} u_0(x) dx = \int_0^2 u_0(x) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (2-x) dx \\ &= 1. \end{aligned}$$

Pour $n \geq 1$, on a

$$a_n = \int_0^2 u_0(x) \cos(n\pi x) dx = \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx + \int_1^2 (2-x) \cos(n\pi x) dx.$$

En intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx &= \left[\frac{x \sin(n\pi x)}{n\pi} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} dx \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \right]_0^1 = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2}. \end{aligned}$$

Avec le changement de variable $t = 2 - x$, on obtient

$$\int_1^2 (2 - x) \cos(n\pi x) dx = \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2}.$$

D'où, on conclut

$$a_n = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi^2}.$$

La série de Fourier de u_0 est

$$\frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi x).$$

Comme \bar{u}_0 est continue et de classe C^1 par morceaux, on a d'après le théorème de Dirichlet, pour tout $x \in [0, 2]$

$$u_0(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi x)$$

et la convergence est normale (donc uniforme) sur \mathbb{R} .

Soit $u(x, t)$ une solution de (EO) 2-périodique développable en série de Fourier

$$u(x, t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n(t) \cos(n\omega x) + b_n(t) \sin(n\omega x)).$$

En dérivant formellement terme à terme, on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a_0''(t)}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n''(t) \cos(n\omega x) + b_n''(t) \sin(n\omega x)),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n \geq 1} (-(n\omega)^2 a_n(t) \cos(n\omega x) - (n\omega)^2 b_n(t) \sin(n\omega x)).$$

Par identification, et en tenant compte des conditions initiales, on obtient

$$a_0''(t) = 0, \quad a_0(0) = a_{0,0}, \quad a_0'(0) = a_{1,0}$$

$$a_n''(t) + \lambda_n^2 a_n(t) = 0, \quad a_n(0) = a_{0,n}, \quad a_n'(0) = a_{1,n},$$

$$b_n''(t) + \lambda_n^2 b_n(t) = 0, \quad b_n(0) = b_{0,n}, \quad b_n'(0) = b_{1,n},$$

où $\lambda_n = cn\omega$.

Comme $\omega = \pi$ et avec ce qui précède, on obtient

$$(1) \quad a_0''(t) = 0, \quad a_0(0) = 1, \quad a_0'(0) = 0$$

$$(2) \quad a_n''(t) + (cn\pi)^2 a_n(t) = 0, \quad a_n(0) = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}, \quad a_n'(0) = 0$$

$$(3) \quad b_n''(t) + (cn\pi)^2 b_n(t) = 0, \quad b_n(0) = 0, \quad b_n'(0) = 0$$

La résolution de l'équation (1) donne

$$a_0(t) = 1.$$

L'équation (2) est une équation linéaire homogène du second ordre et son équation caractéristique est $r^2 + (cn\pi)^2 = 0$ dont les solutions sont $r = \pm icn\pi$. La solution générale est donc

$$a_n(t) = C_1 \cos(cn\pi t) + C_2 \sin(cn\pi t).$$

Les conditions initiales donnent

$$a_n(0) = C_1 = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}, \quad a'_n(0) = C_2 cn\pi = 0,$$

d'où

$$a_n(t) = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} \cos(cn\pi t).$$

La résolution de (3) donne immédiatement $b_n(t) = 0$.

D'où finalement la solution recherchée est

$$u(x, t) = \frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi^2} \right) \cos(cn\pi t) \cos(n\pi x).$$

MERCI DE VOTRE ATTENTION !