

Cours 2. Suites et séries de fonctions

Mathématiques 4

22 janvier 2024

1. Suites de fonctions

Une **suite de fonctions** est la donnée d'une suite

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

de fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notation

Dans ce cours, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1

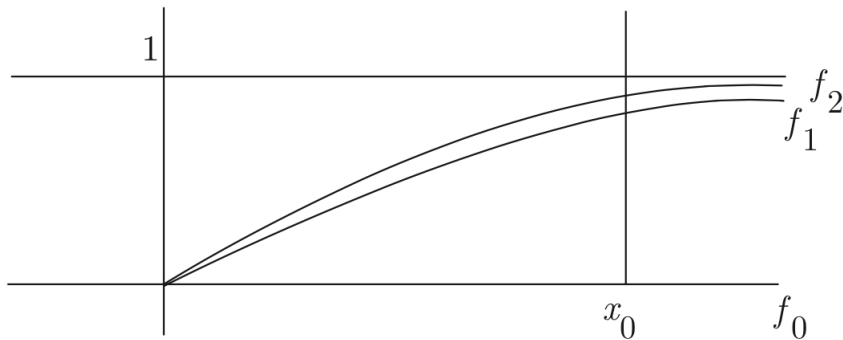
Soit $D \subseteq \mathbb{K}$. Une **suite de fonctions** de D dans $\mathbb{K}$ est la donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'une application $f_n : D \mapsto \mathbb{K}$.

Notation. Une suite de fonctions pourra être notée $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(f_n)_n$ ou (f_n) .

Exemple 1

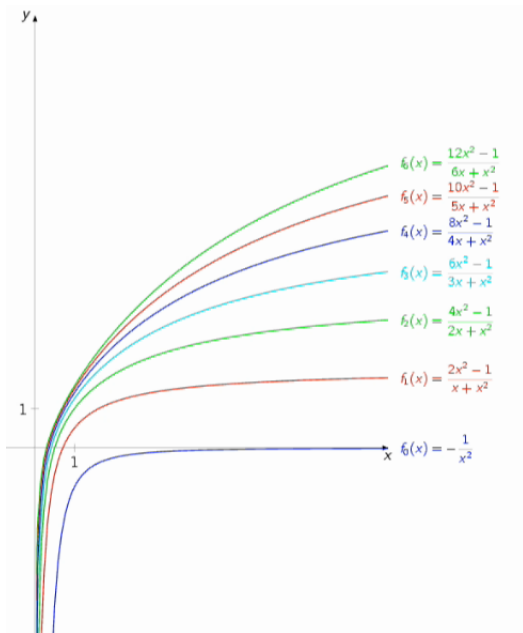
Soit $D = [0, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in D$, on pose

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}.$$



Exemple 2

$$f_n : \begin{cases}]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{2nx^2-1}{nx+x^2}. \end{cases}$$



Exemple 3

$$f_n : \begin{cases}]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \end{cases} f_n(x) = \cos(nx).$$

Exemple 4

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \end{cases} f_n(x) = x^n.$$

Pour les suites de fonctions, on dispose de plusieurs formes de convergence.

On commence par la plus simple

Convergence simple

On a vu qu'une suite numérique peut converger (ou non) vers une limite finie ℓ . De la même manière, on peut étudier la convergence d'une suite de fonctions et voir si elle peut *s'approcher* (ou non) d'une fonction "limite" (converger).

Soit $x_0 \in D$ fixé. Alors la suite $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite numérique dont on peut étudier la convergence.

Si pour tout $x \in D$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, alors on peut définir une *fonction limite* f par

$$f : \begin{cases} D & \rightarrow \mathbb{K} \\ x & \mapsto \end{cases} \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

Définition 2

Soient $D \subseteq \mathbb{K}$ et (f_n) une suite de fonctions définie sur D et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que (f_n) **converge simplement sur D** , si pour tout $x \in D$, la **suite numérique** $(f_n(x))$ est convergente dans $\mathbb{K}$.

Si (f_n) converge simplement sur D , alors la fonction f définie par

$$f : \begin{cases} D & \rightarrow \mathbb{K} \\ x & \mapsto \end{cases} \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

est appelée **la limite simple** de la suite (f_n) sur D .

Exemple 1 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \begin{cases} [0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \end{cases} f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}.$$

On a :

- pour $x \in]0, +\infty[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx}{1 + nx} = 1$,
- pour $x = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$.

Donc (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction f définie par

$$f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exemple 2 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \begin{cases}]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{2nx^2 - 1}{nx + x^2}. \end{cases}$$

On a, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2nx^2 - 1}{nx + x^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n(x^2 - \frac{1}{2n})}{n(x + \frac{x^2}{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(x^2 - \frac{1}{2n})}{(x + \frac{x^2}{n})} = 2x^2/x = 2x.$$

Donc (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x.$$

Exemple 4 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = x^n. \end{cases}$$

- Si $|x| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.
- Si $x = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$.
- Si $|x| > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x)| = +\infty$, donc $(f_n(x))$ diverge.
- Si $x = -1$, $f_n(x) = (-1)^n$ et donc $(f_n(x))$ n'admet pas de limite.

Donc (f_n) ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.

Remarque

En général, la convergence simple dépend du domaine de définition D de la suite (f_n) .

Dans l'exemple précédent, (f_n) ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$. En revanche, elle converge simplement sur l'intervalle $I =]-1, 1]$ et admet comme limite (simple) l'application f définie par

$$f :]-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Convergence uniforme

Supposons que (f_n) est une suite de fonctions définies de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers une fonction f . Donc on suppose qu'il y a déjà une **convergence simple**.

Dans beaucoup d'applications, on aimerait savoir si une propriété qui est satisfaite pour toutes les fonctions f_n , serait aussi satisfaite par f .

On peut se demander

- si chaque f_n est **continue**, f est-elle **continue** ?
- si chaque f_n est **dérivable**, f est-elle **dérivable** et a-t-on $f' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n$?
- si chaque f_n est **intégrable**, f est-elle **intégrable** et a-t-on alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt ?$$

La convergence simple n'est pas suffisante. On utilisera ici une notion plus forte, qui est la **convergence uniforme**.

Convergence uniforme

Pour $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction *majorée* au sens où il existe M tel que $g(x) \leq M$ pour tout $x \in D$, on rappelle que $A := \sup_{x \in D} g(x)$ est le plus petit réel M satisfaisant cette propriété. S'il existe $x \in D$ tel que $A = g(x)$, on dit que A est le *maximum* de g .

Exemple

Si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $g(x) = -e^x$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} g(x) = 0$. Ce supremum n'est pas un maximum.

Définition 3 (Convergence uniforme)

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge **simplement** sur D vers la fonction f . On dit que **(f_n) converge uniformément sur D vers f** si :

- la quantité $u_n = \sup_{x \in D} (|f_n(x) - f(x)|) \in \mathbb{R}$ est finie, au sens où la fonction $x \mapsto |f_n(x) - f(x)|$ est majorée par un réel $M_n < +\infty$, pour tout n assez grand,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

En pratique ...

Proposition 1

La suite (f_n) converge uniformément sur D vers f , si et seulement si, il existe une suite réelle (u_n) vérifiant :

- pour tout n assez grand : $\forall x \in D, |f_n(x) - f(x)| \leq u_n$,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Remarque

Pour montrer qu'il n'y a pas de convergence uniforme, il suffit d'exhiber une suite (x_n) d'éléments de D telle que $f_n(x_n) - f(x_n)$ ne tend pas vers 0.

Remarque

Pour montrer la convergence uniforme de (f_n) , il faut après avoir trouvé la limite simple f , essayer de majorer $|f_n(x) - f(x)|$ en fonction seulement de n , **indépendamment** de x (on dit aussi "uniformément en x ").

Exemple 1 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \begin{cases} [0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \end{cases} f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}.$$

On a vu que (f_n) converge simplement vers f qui est définie par

$$f : D = [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pour tout $x > 0$, on a $|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx}{1 + nx} - 1 \right| = \frac{1}{1 + nx}$ et $|f_n(0) - f(0)| = 0$.

On a donc $u_n = \sup_{x \in D} \frac{1}{1 + nx} = 1$ qui ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

Donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur D .

Exemple 1 (suite)

En revanche, (f_n) converge uniformément vers f sur tout intervalle de la forme $D = [a, +\infty[$ où $a > 0$.

En effet, pour tout $x \in D$,

$$a \leq x \Rightarrow 1 + na \leq 1 + nx \Rightarrow \frac{1}{1 + nx} \leq \frac{1}{1 + na},$$

donc en posant $u_n = \frac{1}{1 + na}$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq u_n,$$

et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, on déduit le résultat.

Exemple 2 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{2nx^2 - 1}{nx + x^2}. \end{cases}$$

On a vu que (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$. On a $|f_n(x) - f(x)| = \frac{1 + 2x^3}{nx + x^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1 + 2x^3}{nx + x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x \quad (n \text{ fixé})$$

et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$.

Donc la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur D .

Exemple 2 (suite)

En revanche, (f_n) converge uniformément vers f , sur tout intervalle de la forme $[a, b]$ où $0 < a < b < +\infty$.

En effet, on a

$$\frac{1 + 2a^3}{nb + b^2} \leq \frac{1 + 2x^3}{nx + x^2} \leq \frac{1 + 2b^3}{na + a^2},$$

donc

$$|f_n(x) - f(x)| \leq u_n := \frac{1 + 2b^3}{na + a^2}$$

et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, on déduit le résultat.

Théorème 1

Si une suite de fonctions (f_n) **converge uniformément** sur D vers une fonction f et si chaque f_n est **continue** sur D , alors f est **continue** sur D .

Plus précisément, si (f_n) **converge uniformément** sur D vers f et si chaque f_n est continue en $x_0 \in D$, alors f est continue en x_0 et on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right).$$

Remarque

Attention, la convergence simple n'est pas suffisante pour déduire la continuité de la limite (simple). Reprenons la suite

$$f_n : \begin{cases} [0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}. \end{cases}$$

dont la limite simple est $f : D = [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Chaque f_n est continue sur D (en particulier en 0), alors que f n'est pas continue en 0.

Théorème 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$ **convergeant uniformément** sur $[a, b]$ vers une fonction f . Alors

- f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$,
- en posant, pour tout $x \in [a, b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

la suite (F_n) converge uniformément vers F sur $[a, b]$.

En particulier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt.$$

Exemple 1 (suite)

Reprenons la suite (où $a > 0$)

$$f_n : \begin{cases} [a, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \end{cases} \quad f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}.$$

dont la limite uniforme est $f : D = [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 1$.

Sur $[a, 1]$ on a

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt = (x - a) - \frac{\ln(1 + nx)}{n} + \frac{\ln(1 + na)}{n}, \quad F(x) = x - a,$$

et on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = F$ uniformément.

Théorème 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose :

- que la suite **des dérivées** (f'_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g ,
- qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ converge.

Alors la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f dérivable telle que $f' = g$.

Enfin, si chaque f_n est de classe C^1 , il en est de même de f .

2. Séries de fonctions

De la même manière qu'on avait défini les séries numériques à partir des suites numériques, on définit les **séries de fonctions** à partir des suites de fonctions.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions. Donc on s'intéresse à la somme

$$f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

Si x est fixé, la suite $(f_n(x))_n$ est une suite numérique et donc on peut étudier la série numérique $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$.

Définition 1

Soit (f_n) une suite de fonctions (réelle ou complexe). On appelle **série de fonctions** de terme général f_n et on note $\sum f_n$, la **suite de fonctions** (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^n f_k = f_0 + f_1 + \cdots + f_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On appelle S_n la **somme partielle d'ordre n** de la série $\sum f_n$.

Remarque

On a

$$S_n(x) = f_0(x) + \cdots + f_n(x).$$

Définition 2 (Convergence simple)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur D . On dit que la série $\sum f_n$ **converge simplement sur D** si la suite des sommes partielles (S_n) converge simplement sur D .

D'une manière équivalente : la série $\sum f_n$ converge simplement sur D si pour tout $x \in D$, la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente.

Notation. Si $\sum f_n$ converge simplement sur D vers la fonction S , on note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = S(x).$$

Exemple 1

Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{3^n}. \end{cases}$$

Étudions la convergence simple de la série $\sum f_n$. Fixons $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\left| \frac{\sin(nx)}{3^n} \right| \leq \frac{|\sin(nx)|}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}.$$

Comme la série numérique $\sum \frac{1}{3^n}$ est convergente (c'est une série géométrique convergente), on déduit que la série numérique $\sum \frac{\sin(nx)}{3^n}$ est absolument convergente.

Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2 : séries géométriques

Soit $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général $f_n(z) = z^n$. La suite $(f_n(z))$ est une suite géométrique de raison z et on a

$$\text{si } z \neq 1, S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

$$\text{si } z = 1, S_n = n + 1.$$

La série $\sum f_n(z)$ converge si et seulement si $0 \leq |z| < 1$.

Donc la série $\sum f_n$ converge simplement sur le disque $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. Dans ce cas, on peut calculer sa limite simple :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}.$$

Convergence uniforme

Définition 3 (Convergence uniforme)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur D . On dit que la série $\sum f_n$ **converge uniformément sur D** si la suite de fonctions (S_n) donnée par les sommes partielles converge uniformément sur D .

Proposition 1

Toute série de fonctions qui converge uniformément sur D converge simplement sur D .

Remarque

Pour montrer qu'il n'y a pas de convergence uniforme, il suffit d'exhiber une suite (x_n) d'éléments de D telle que $f_n(x_n)$ ne tend pas vers 0.

Exemple 2 : séries géométriques

Reprenons $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général $f_n(z) = z^n$. Sur le disque $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, on a

$$S_n(z) - S(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} - \frac{1}{1 - z} = \frac{-z^{n+1}}{1 - z},$$

$$\text{et donc } |S_n(z) - S(z)| = \frac{|z|^{n+1}}{|1 - z|} \left(\leq \frac{|z|^{n+1}}{|1 - |z||} \right).$$

Comme $\lim_{\substack{|z| \rightarrow 1 \\ z \neq 1}} \frac{|z|^{n+1}}{|1 - z|} = +\infty$, la série $\sum f_n(z)$ ne converge pas

uniformément sur le disque $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

Exemple 2 : séries géométriques

En revanche, elle converge uniformément sur tout disque de la forme $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\}$ où $0 \leq r < 1$. En effet,

$$|S_n(z) - S(z)| \leq \frac{|z|^{n+1}}{|1 - |z||} \leq \frac{r^{n+1}}{|1 - r|}$$

et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r^{n+1}}{|1 - r|} = 0$, on déduit la convergence uniforme.

Définition 4

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge simplement vers S . On appelle **suite des restes partiels**, la suite $(R_n)_n$ de fonctions définie par

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

R_n est appelé le **reste d'ordre n** .

Remarque

Remarquons que (R_n) est bien définie et que pour tout $x \in D$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$$

et donc en particulier $(R_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle.

Proposition 2

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge simplement sur D . Alors elle converge **uniformément** sur D si et seulement si la suite des restes partiels (R_n) converge **uniformément** sur D vers la fonction nulle.

Convergence uniforme et reste partiel

Le critère précédent est particulièrement utile lorsqu'on peut majorer le reste d'ordre n . C'est le cas, par exemple, des séries alternées.

Exemple 3

Soit $\sum f_n$ la série de terme général

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}. \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, la série numérique $\sum f_n(x)$ de terme général $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$ est une série *alternée* qui satisfait les conditions de la règle des séries alternées : $|f_n(x)|$ est **décroissante** et $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x)| = 0$.
Donc la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple 3

Comme $\sum f_n(x)$ satisfait les conditions de la règle des séries alternées, nous avons la majoration

$$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{x + n + 1} \leq \frac{1}{n + 1}$$

et donc

$$|R_n(x) - 0| \leq \frac{1}{n + 1}.$$

On déduit la convergence uniforme de (R_n) vers 0.

Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $f : D \subseteq \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ une application bornée. On note

$$\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)| < +\infty$$

qu'on appelle **la norme de la convergence uniforme** de f .

Remarquons que si (f_n) est une suite de fonctions bornées à partir d'un certain rang, alors (f_n) converge uniformément vers la fonction f si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\| = 0$.

Définition 5

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions. On dit que $\sum f_n$ **converge normalement sur D** si la série numérique à termes positifs $\sum \|f_n\|$ est convergente.

Définition 6

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions. On dit que $\sum f_n$ **converge absolument sur D** si la série de fonctions $\sum |f_n|$ converge simplement sur D .

Remarques

- Pour montrer qu'il y a convergence normale, on cherche à majorer $\|f_n\|$ par un réel u_n tel que $\sum u_n$ soit convergente.
- Pour montrer qu'il n'y a pas convergence normale, on cherche à minorer $\|f_n\|$ par un réel positif u_n tel que $\sum u_n$ soit divergente.

Exemple 1 (suite)

Reprenons $(f_n)_n$ la suite de fonctions

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{3^n}. \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

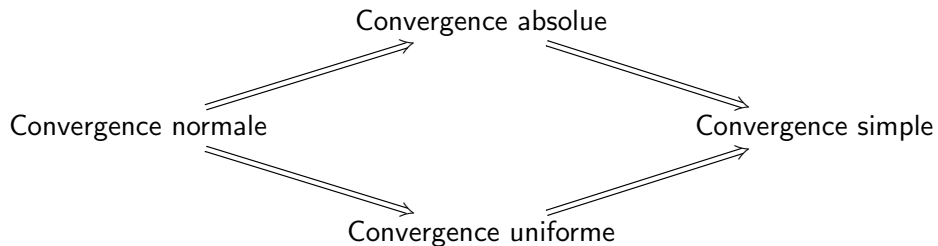
$$\left| \frac{\sin(nx)}{3^n} \right| \leq \frac{|\sin(nx)|}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}$$

et donc

$$\|f_n\| \leq \frac{1}{3^n}.$$

Comme la série numérique $\sum \frac{1}{3^n}$ est convergente, on déduit que la série de fonctions $\sum \frac{\sin(nx)}{3^n}$ est normalement convergente.

Liens entre les différentes formes de convergence



Liens entre les différentes formes de convergence

Remarque

La convergence uniforme n'entraîne pas la convergence absolue.
Reprenons la série $\sum f_n$ de terme général

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}. \end{cases}$$

Nous avons vu qu'elle est uniformément convergente. Mais elle n'est pas absolument convergente. En effet, la série à *termes positifs* $\sum |f_n(x)|$ satisfait

$$|f_n(x)| = \frac{1}{x+n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \quad (x \text{ fixé})$$

et la série $\sum \frac{1}{n}$ n'est pas convergente et donc $\sum |f_n|$ n'est pas convergente.

Rappel

Le terme général d'une série **numérique** convergente tend vers 0. Si ce terme général ne tend pas vers 0, on dit d'ailleurs que la série diverge grossièrement.

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 3

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions.

- Si $\sum f_n$ converge simplement, alors (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
- Si $\sum f_n$ converge uniformément, alors (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.
- Si $\sum f_n$ converge normalement, alors la suite numérique $(\|f_n\|)$ converge vers 0.

Attention

Les réciproques dans la proposition précédente sont toutes fausses en général... !

Comme les sommes partielles des séries de fonctions présentent des propriétés analogues à celles des suites de fonction, on a aussi :

Théorème 1

Si une série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément** sur D vers une fonction S et si chaque f_n est continue sur D , alors S est continue sur D .

Plus précisément, si $\sum f_n$ **converge uniformément** sur D vers S et si chaque f_n est continue en $x_0 \in D$, alors S est continue en x_0 .

On a en particulier

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right).$$

Théorème 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$. Supposons que $\sum f_n$ **converge uniformément** sur $[a, b]$ vers une fonction S . Alors

- S est Riemann-intégrable sur $[a, b]$,
- en posant, pour tout $x \in [a, b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt, \quad F(x) = \int_a^x S(t) dt,$$

la série $\sum F_n$ converge uniformément vers F sur $[a, b]$.

On a en particulier

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t) dt \right).$$

Théorème 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose :

- que la série des **dérivées** $\sum f'_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g ,
- qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la série $\sum f_n(x_0)$ converge.

Alors la suite $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f dérivable telle que $f' = g$; on peut en particulier dériver terme à terme au sens où

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(t).$$

Enfin, si chaque f_n est de classe C^1 , il en est de même de f .

Exercice récapitulatif

Soit $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^3 x^2}. \end{cases}$$

- (1) Soit $a > 0$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $D_a =] - \infty, -a] \cup [a, +\infty[$. Y a-t-il convergence normale sur $\mathbb{R}$?
- (2) Soit S la limite de la série. Montrer que S est continue sur $]0, +\infty[$.
- (3) Montrer que S est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et écrire S' comme la somme d'une série. *Indication : considérer $]0, +\infty[= \cup_{k \geq 1} [1/k, +\infty[$.*
- (4) Montrer que S est Riemann-intégrable sur $[1, 2]$ et écrire $\int_1^2 S(x) dx$ comme la somme d'une série.

Corrigé

(1) On a

$$f'_n(x) = \frac{n(1 + n^3x^2) - nx \times (2xn^3)}{(1 + n^3x^2)^2} = \frac{n(1 - n^3x^2)}{(1 + n^3x^2)^2},$$

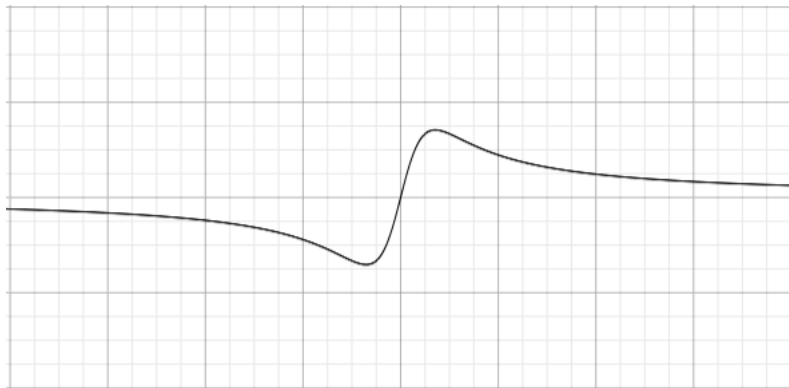
$$f'_n(x) = 0 \text{ ssi } x = \pm \frac{1}{\sqrt{n^3}},$$

$$f'_n(x) \leq 0 \text{ ssi } |x| \geq \frac{1}{\sqrt{n^3}} \text{ ssi } x \in] -\infty, -\frac{1}{\sqrt{n^3}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{n^3}}, +\infty[.$$

Donc

$$f_n \text{ est décroissante sur }] -\infty, -\frac{1}{\sqrt{n^3}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{n^3}}, +\infty[,$$

$$\text{et croissante sur } [-\frac{1}{\sqrt{n^3}}, \frac{1}{\sqrt{n^3}}].$$



Pour n assez grand,

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{n^3}}, \frac{1}{\sqrt{n^3}}\right] \subseteq [-a, a], \quad \|f_n\|_D = \sup_{D_a} |f_n(x)| = f_n(a) = \frac{na}{1 + n^3 a^2} \sim \frac{1}{an^2}.$$

Donc la série converge normalement sur D_a .

Sur $\mathbb{R}$, on a

$$\|f_n\|_{\mathbb{R}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

La série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente. On déduit que la série $\sum f_n$ n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit $x_0 \in]0, +\infty[$. On peut alors choisir $a \in]0, x_0[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en x_0 . La série $\sum f_n$ est normalement convergente et donc uniformément convergente sur $[a, +\infty[$. On conclut que sa limite S est continue en x_0 .

(3) Pour pouvoir appliquer le théorème de dérivation des séries, on étudie la convergence uniforme de la série $\sum f'_n$. On a

$$f'_n(x) = \frac{n(1 - n^3 x^2)}{(1 + n^3 x^2)^2}.$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b < 0$ ou $0 < a < b$. On a, pour tout $x \in [a, b]$, $|(1 - n^3 x^2)| \leq |1| + |-n^3 x^2| = 1 + n^3 x^2$ et donc

$$\|f'_n(x)\| \leq \frac{n(1 + n^3 b^2)}{(1 + n^3 a^2)^2}, \quad \text{si } 0 < a < b,$$

$$\|f'_n(x)\| \leq \frac{n(1 + n^3 a^2)}{(1 + n^3 b^2)^2}, \quad \text{si } a < b < 0.$$

Or

$$\frac{n(1 + n^3\alpha^2)}{(1 + n^3\beta^2)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha^2}{\beta^4 n^2} \quad (\alpha, \beta > 0 \text{ fixés})$$

et donc la série $\sum f'_n$ est normalement, puis uniformément convergente sur $[a, b]$.

Comme $\sum f_n$ est normalement convergente, elle est simplement convergente et donc il existe bien $x_0 \in [a, b]$ tel que la série $\sum f_n(x_0)$ est convergente.

Par conséquent, S est dérivable sur $[a, b]$ et pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(1 - n^3 x^2)}{(1 + n^3 x^2)^2}.$$

(4) La série $\sum f_n$ est uniformément convergente sur $[1, 2]$ et les f_n sont continues donc Riemann-intégrables, d'où S est Riemann-intégrable sur $[1, 2]$. On a ainsi

$$\int_1^2 f_n(x) \, dx = \frac{1}{2n^2} \ln \left(\frac{1 + 4n^3}{1 + n^3} \right),$$

et donc

$$\int_1^2 S(x) \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n^2} \ln \left(\frac{1 + 4n^3}{1 + n^3} \right).$$

MERCI DE VOTRE ATTENTION !