Bienvenue en cours de Mathématiques 4 !

Organisation de L'UE Mathématiques 4 (MAT2013L)

Vous avez reçu par mail un lien vers la **page du cours**. Vous trouverez notamment sur cette page :

- des informations sur le Cours Magistral CM (références, avancement, transparents du cours **sans toutes les solutions d'exercices**),
- des informations sur les Travaux Dirigés TD (feuilles de TD, programme des séances),
- des annales des années précédentes pour vous exercer
- des informations sur votre évaluation (date du contrôle partiel, coefficients).

NB1 : le plus efficace pour préparer le contrôle partiel est d'**être à jour sur le CM et les TD**.

Plan général du cours sur le semestre (24h) :

1. Relations de comparaison : développements limités, équivalents, développements asymptotiques.
2. Suites et séries de fonctions.
3. Séries de Fourier. Applications.
4. Notions d'Équations aux Dérivées Partielles (ÉDP).
5. Intégrales impropres. Intégrale de Lebesgue. Mesures (Dirac δ_0). Intégrales à paramètre.
6. Transformée de Laplace ("révisions" décomposition en éléments simples).
7. Produit de convolution et régularisation.
8. Transformée de Fourier. Application à l'étude d'ÉDP linéaires (ondes, chaleur, Schrödinger) sur $\mathbb{R}$.
9. Principe d'incertitude.

Cours 1. Relations de comparaison : développements limités, équivalents, développements asymptotiques.

Mathématiques 4, printemps 2024

25 février 2025

Idée générale

Une notion importante dans la suite pour savoir si des intégrales ou des séries sont bien définies sera la notion de *vitesse de convergence*. Il est alors utile de savoir comparer une fonction "compliquée" à une autre fonction plus simple servant de référence. C'est le but des relations de comparaisons dont une forme particulièrement utile est appelée développement limité (développement de Taylor).

Comparaison en $+\infty$

Dans cette partie, **on suppose connue la notion de limite** (finie ou $\pm\infty$) quand $x \to +\infty$ (**si besoin, revoir cours** terminale ou **TMB**).

Définition 1

Soit $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que b est une fonction ***bornée en $+\infty$*** *s'il existe des réels positifs M, C tels que pour tout $x \geq M$, on ait $|b(x)| \leq C$.*

NB : on dit parfois *bornée au voisinage de* $+\infty$ au lieu de *bornée en* $+\infty$.

Exemple 1

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction tendant vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$: si $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell$, alors g est bornée en $+\infty$. On vérifie alors que la fonction f donnée par $f(x) = g(x) \times \sin(x)$ est aussi bornée en $+\infty$.

Définition 2

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. ***Domination.*** *La fonction f est dite **dominée en** $+\infty$ par la fonction g et on note alors $f(x) =_{x\to+\infty} O(g(x))$ ou simplement $f = O_{+\infty}(g)$, s'il existe une fonction $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un réel $M > 0$ tels que, pour tout $x \geq M$, on ait*

   $$f(x) = b(x)g(x) \qquad \text{et } b \text{ est une fonction } \textbf{bornée} \text{ en } +\infty.$$

2. ***Négligeabilité.*** *La fonction f est dite **négligeable en** $+\infty$ devant la fonction g et on note $f(x) =_{x\to+\infty} o(g(x))$ ou simplement $f = o_{+\infty}(g)$ s'il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un réel $M > 0$ tels que, pour tout $x \geq M$, on ait*

   $$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \qquad \text{et } \lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

3. ***Équivalence.*** *La fonction f est dite **équivalente en** $+\infty$ à la fonction g et on note $f(x) \sim_{x\to+\infty} g(x)$ ou simplement $f \sim_{+\infty} g$ s'il existe une fonction $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un réel $M > 0$ tels que, pour tout $x \geq M$, on ait*
   $f(x) = e(x)g(x) \qquad \text{et } \lim_{x\to+\infty} e(x) = 1.$

Comparaison en $+\infty$ (suite)

Remarque 1

On utilise parfois la périphrase "au voisinage de $+\infty$" au lieu de dire simplement "en $+\infty$" dans les définitions précédentes.

Les notations o, O sont appelées notations de Landau. Les notions ci-dessus sont particulièrement utilisées lorsque la fonction "de référence" g ne s'annule pas pour tout x assez grand, c'est à dire, en reprenant les notations de la précédente définition, lorsqu'on a :

$$\exists M > 0\,, \quad \forall x \geq M\,, \quad g(x) \neq 0\,.$$

Une conséquence immédiate de la définition précédente est la suivante :

Proposition 1

On a : $f(x) \sim_{x\to+\infty} g(x)$ si et seulement si $f(x) - g(x) =_{x\to+\infty} o(g(x))$.

Comparaison en $+\infty$ (suite)

Remarque 2

Si $\lambda \neq 0$ est une constante alors $f(x) \sim_{x\to\infty} \lambda$ veux simplement dire qu'on a la limite $f(x) \to \lambda$ quand $x \to +\infty$, mais...

Attention !

Aucune fonction usuelle n'est équivalente à 0 !

En effet, $f(x) \sim_{x\to+\infty} 0$ veut dire $f(x) = e(x) \times 0$ pour x assez grand , donc $f(x)$ est identiquement nulle ($=0$) pour tout x grand. Si vous trouvez cette réponse en exercice, votre réponse est presque sûrement fausse !

Comparaison en $+\infty$ (suite)

Proposition 2

On suppose que $\exists M < +\infty, \forall x \geq M, g(x) \neq 0$.

1. $f(x) =_{x\to+\infty} O(g(x)) \iff f/g$ *est bornée sur* $[N, +\infty[$ *pour un certain* $N \geq M$.
2. $f(x) =_{x\to+\infty} o(g(x)) \iff \lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x) = 0$.
3. $f(x) \sim_{x\to+\infty} g(x) \iff \lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x) = 1$

Exemple 2 (révision de terminale/TMB sur les limites)

1. $x^\alpha =_{x\to+\infty} o(x^\beta)$ si et seulement si $\alpha < \beta$. En effet $x^\alpha/x^\beta = 1/x^{\beta-\alpha}$ qui tend vers 0 quand $x \to +\infty$ si et seulement si $\beta - \alpha > 0$.
2. $x^\alpha =_{x\to+\infty} o(e^{\beta x})$ pour $\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$ fixés.
   En effet $x^\alpha/e^{\beta x} = x^\alpha e^{-\beta x}$ qui tend alors toujours vers 0 quand $x \to +\infty$ pour $\beta > 0$.

Comparaison en $+\infty$ (suite)

Exemple 2 (suite)

3. $e^{-\beta x} =_{x\to+\infty} o(x^\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$ fixés.
   En effet $e^{-\beta x}/x^\alpha = x^{-\alpha}e^{-\beta x}$ qui tend vers 0 quand $x \to +\infty$ pour $\beta > 0$.
4. si $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ polynôme avec a_n différent de 0 alors $P(x) \sim_{x\to+\infty} a_n x^n$ car $P(x)/x^n = \sum_{k=0}^n a_k x^{k-n} =_{x\to+\infty} a_n + o(1)$.

Un polynôme est équivalent en $+\infty$ à son monôme de plus haut degré !

Exemple 2 (suite)

5. $\ln x =_{x\to+\infty} o(x^\beta)$ pour $\beta > 0$.
   En effet, par **croissance comparée**, on a alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\beta} = 0$.

Comparaison en $+\infty$ (suite)

Les relations de base suivantes peuvent être utilisées librement. Elles doivent aussi pouvoir être retrouvées rapidement directement à partir de la définition 2.

Proposition 3

Soient f, g, h, k des fonctions.

1. $f(x) =_{x\to+\infty} o(g(x)) \Rightarrow f(x) =_{x\to+\infty} O(g(x))$.
2. $f(x) \sim_{x\to+\infty} g(x) \Rightarrow f(x) =_{x\to+\infty} O(g(x))$.
3. $f(x) =_{x\to+\infty} O(h(x))$ *et* $g(x) =_{x\to+\infty} O(h(x)) \Rightarrow f(x) + g(x) =_{x\to+\infty} O(h(x))$.
4. $f(x) =_{x\to+\infty} O(h(x))$ *et* $g(x) =_{x\to+\infty} O(k(x)) \Rightarrow f(x)g(x) =_{x\to+\infty} O(h(x)k(x))$.
5. $f(x) =_{x\to+\infty} o(h(x))$ *et* $g(x) =_{x\to+\infty} o(h(x)) \Rightarrow f(x) + g(x) =_{x\to+\infty} o(h(x))$.

Comparaison en $+\infty$ (suite)

Proposition 3 (suite)

6. $f(x) =_{x\to+\infty} o(h(x))$ et $g(x) =_{x\to+\infty} O(k(x)) \Rightarrow f(x)g(x) =_{x\to+\infty} o(h(x)k(x))$.
7. $f(x) \sim_{x\to+\infty} h(x)$ et $g(x) \sim_{x\to+\infty} k(x) \Rightarrow f(x)g(x) \sim_{x\to+\infty} h(x)k(x)$.
8. $f(x) =_{x\to+\infty} O(g(x))$ et $g(x) =_{x\to+\infty} O(h(x)) \Rightarrow f(x) =_{x\to+\infty} O(h(x))$.
9. $f(x) =_{x\to+\infty} o(g(x))$ et $g(x) =_{x\to+\infty} O(h(x)) \Rightarrow f(x) =_{x\to+\infty} o(h(x))$.
10. $f(x) =_{x\to+\infty} O(g(x))$ et $g(x) =_{x\to+\infty} o(h(x)) \Rightarrow f(x) =_{x\to+\infty} o(h(x))$.

Attention

Pas de sommes d'équivalents !

Comparaison en $+\infty$ (suite)

Illustration des deux avertissements précédents (en rouge)

Si $f(x) = x + x^3$, $g(x) = x - x^3$, alors $f(x) \sim_{x\to+\infty} x^3$, $g(x) \sim_{x\to+\infty} -x^3$ mais $f(x) + g(x) = 2x \not\sim_{x\to+\infty} 0$. Ce type d'annulation est la source principale d'erreur donnant des équivalents à 0.

Preuve de la proposition 3

Dans cette preuve de la proposition 3, tout se passe quand $x \to +\infty$, même si on ne le précise (du coup) pas à chaque fois.

1. Si $f(x) =_{x\to+\infty} o(g(x))$ alors $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ et $\varepsilon(x) \to_{x\to+\infty} 0$, donc $\varepsilon(x)$ est bornée en $+\infty$ (voir exemple 1), ce qui donne bien $f(x) =_{x\to+\infty} O(g(x))$.
2. Si $f(x) \sim_{x\to+\infty} g(x)$ alors $f(x) = e(x)g(x)$ et $e(x) \to_{x\to+\infty} 1$, donc $e(x)$ est bornée en $+\infty$, ce qui donne bien $f(x) =_{x\to+\infty} O(g(x))$ (voir exemple 1).
3. Si $f(x) =_{x\to+\infty} O(h(x))$ et $g(x) =_{x\to+\infty} O(h(x))$, on a pour x assez grand $f(x) = b(x)h(x)$ et $g(x) = \tilde{b}(x)h(x)$ avec $b, \tilde{b}$ bornées en $+\infty$: on peut donc fixer $M, C > 0$ telles que pour tout $x \geq M$, on ait $|b(x)| \leq C$ et $|\tilde{b}(x)| \leq C$. D'où $f(x) + g(x) = (b(x) + \tilde{b}(x))h(x)$ avec $b + \tilde{b}$ bornée en $+\infty$. On vérifie en effet que
$$\forall x \geq M, \quad |b(x) + \tilde{b}(x)| \leq |b(x)| + |\tilde{b}(x)| \leq 2C,$$

Preuve de la proposition 3 (suite)

ce qui donne bien $f(x) + g(x) =_{x \to +\infty} O(h(x))$.

4. Si $f(x) =_{x\to+\infty} O(h(x))$ et $g(x) =_{x\to+\infty} O(k(x))$, on peut trouver $M, C_1, C_2 > 0$ tels que pour tout $x \geq M$ assez grand
$|f(x)| \leq C_1|h(x)|$ et $|g(x)| \leq C_2|k(x)|$, donc
$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq C_1 C_2 |h(x)||k(x)|$ *donc*
$f(x)g(x) = O(h(x)k(x))$.
$\to$"*donc*" : vérifier que la fonction b donnée par
$b(x) = f(x)g(x)/(h(x)k(x))$ si $h(x)k(x) \neq 0$ et par $b(x) = 0$ sinon satisfait $fg = bhk$ et $|b(x)| \leq C_1 C_2$ pour tout $x \geq M$.
5. Si $f(x) =_{x\to+\infty} o(h(x))$ et $g(x) =_{x\to+\infty} o(h(x))$ alors pour x grand, $f(x) = \varepsilon(x)h(x)$ et $g(x) = \eta(x)h(x)$ avec
$\lim \varepsilon(x) = \lim \eta(x) = 0$, donc $f(x) + g(x) = (\varepsilon(x) + \eta(x))h(x)$ et comme $\lim(\varepsilon(x) + \eta(x)) = 0$, $f(x) + g(x) = o(h(x))$.
6. Si $f(x) =_{x\to+\infty} o(h(x))$ et $g(x) =_{x\to+\infty} O(k(x))$, on a
$f(x) = \varepsilon(x)h(x)$ et $g(x) = b(x)k(x)$ avec $\lim \varepsilon(x) = 0$ et b bornée en $+\infty$: $\exists M, C > 0, \forall x \geq M, |b(x)| \leq C$.

Preuve de la proposition 3 (suite)

D'où pour $x \geq M$, on a $f(x)g(x) = \varepsilon(x)b(x)h(x)k(x)$ et $0 \leq |\varepsilon(x)b(x)| \leq |\varepsilon(x)|C \to 0$ donc $\varepsilon b \to 0$ par théorème d'encadrement (ou des "gendarmes"), et on conclut bien que $f(x)g(x) = o(h(x)k(x))$.

7. Si $f(x) \sim_{x\to+\infty} h(x)$ et $g(x) \sim_{x\to+\infty} k(x)$, on a $f(x) = e_1(x)h(x)$ et $g(x) = e_2(x)k(x)$ avec $e_1(x) \to 1$ et $e_2(x) \to 1$ donc $f(x)g(x) = e_1(x)e_2(x)h(x)k(x)$ et $e_1(x)e_2(x) \to 1$, donc $f(x)g(x) \sim_{x\to+\infty} h(x)k(x)$.
8. Si $f(x) =_{x\to+\infty} O(g(x))$ et $g(x) =_{x\to+\infty} O(h(x))$, on a donc pour x grand $|f(x)| \leq C_1|g(x)|$ et $|g(x)| \leq C_2|h(x)|$, donc $|f(x)| \leq C_1C_2|h(x)|$ et donc $f(x) = O(h(x))$.
9. Si $f(x) =_{x\to+\infty} o(g(x))$ et $g(x) =_{x\to+\infty} O(h(x))$, on a $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ et $g(x) = b(x)h(x)$ avec $\lim \varepsilon(x) = 0$ et $|b(x)| \leq C$ pour $x \geq M$, d'où $f(x) = \varepsilon(x)b(x)h(x)$ et $0 \leq |\varepsilon(x)b(x)| \leq |\varepsilon(x)|C \to 0$ donc $f(x) = o(h(x))$. Le dernier cas est similaire.

Comparaison en tout a dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$: cas général

Nous rappelons maintenant les comparaisons de fonctions en $a \in \mathbb{R}$ pour déduire des développements de Taylor usuels (cf TMB) les équivalents usuels. Dans les définitions suivantes, on se donne le lieu de comparaison a dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et l'ensemble de définition $D \subset \mathbb{R}$ un sous intervalle de $\mathbb{R}$ satisfaisant soit $D =]A, B[,\ A < a < B$, soit $D =]a, A[$, soit $D =]A, a[$, soit $D =]A, +\infty[$ et alors $a = +\infty$, soit $D =]-\infty, A[$ et alors $a = -\infty$.

On dit aussi que $V \subset D$ est un **voisinage** de a s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $V =]a, M[$ si $D =]a, A[$, tel que $V =]M, a[$ si $D =]A, a[$ ou
tel que $V =]C, D[\supset a$ si $D =]A, B[$

On suppose dorénavant dans cette partie que D, a est dans l'un des cas ci-dessus.

Définition 3

Soit $b : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que b est une fonction ***bornée au voisinage de*** *a s'il existe un voisinage V de a et un réel positif C tels que pour tout $x \in V$, on ait $|b(x)| \leq C$.*

Comparaison en tout a dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$: cas général (suite)

Définition 4

Soient f et g, deux fonctions de D dans $\mathbb{R}$.

1. ***Domination.*** *La fonction f est dite **dominée** par la fonction g au voisinage de a et on note $f(x) =_{x \to a} O(g)$ s'il existe une fonction $b : D \to \mathbb{R}$ bornée au voisinage de a telle que $f = bg$.*
2. ***Négligeabilité.*** *La fonction f est dite **négligeable** devant la fonction g au voisinage de a et on note $f(x) =_{x \to a} o(g(x))$ s'il existe une fonction $\varepsilon : D \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ et telle que $f = \varepsilon g$.*
3. ***Équivalence.*** *La fonction f est dite **équivalente** à la fonction g en a et on note $f(x) \sim_{x \to a} g(x)$ s'il existe une fonction $e : D \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \to a} e(x) = 1$ et telle que $f = eg$.*

Comparaison en tout a dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$: cas général (suite)

Exemple 3 (révision de terminale/TMB sur les limites, à comparer à 2)

1. Même si écrire $f(x) \to_{x \to a} 0$ ou $f(x) =_{x \to a} o(1)$ est fondamentalement la même chose, on verra en TD que la notation "o" est en pratique plus facile à manipuler.
2. $x^\alpha =_{x \to 0} o(x^\beta)$ si et seulement si $\alpha > \beta$.
   En effet $x^\alpha / x^\beta = x^{\alpha - \beta}$ qui tend vers 0 en 0 si et seulement si $\alpha - \beta > 0$.
3. si $P(x) = \sum_{k=l}^{n} a_k x^k$ polynôme avec a_l différent de 0 alors $P(x) \sim_{x \to 0} a_l x^l$ car $P(x)/x^l = \sum_{k=l}^{n} a_k x^{k-l} =_{x \to 0} a_l + o(1)$.

Un polynôme est équivalent en 0 à son monôme de plus petit degré !

On a les mêmes propriétés que pour les relations de comparaison en $+\infty$, en remplaçant $+\infty$ par a. On obtient des équivalents en utilisant les développements limités vus en TMB [1].

Proposition 4 (Équivalents usuels quand $x \to 0$)

On a :

$$e^x - 1 \sim_{x\to 0} x, \qquad \ln(1+x) \sim_{x\to 0} x,$$

$$\sin(x) \sim_{x\to 0} x, \qquad \tan(x) \sim_{x\to 0} x,$$

$$\cos(x) - 1 \sim_{x\to 0} -\frac{x^2}{2}, \qquad \frac{1}{1-x} - 1 \sim_{x\to 0} x,$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim_{x\to 0} \alpha x, \qquad (\alpha \in \mathbb{R} \textit{ indépendant de } x),$$

f dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$: $f(x) - f(a) \sim_{x\to a} f'(a)(x-a)$.

1. `http://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/TMB/TMB-livret-2018.pdf` p 38

Exemple 4 (Développements limités)

Une relation $f(x) =_{x\to a} P(x-a) + o((x-a)^n))$ où P est un polynôme de degré $\leq n$ s'appelle un Développement Limité (DL) d'**ordre** n en $a \in \mathbb{R}$. Vous avez vu en TMB (même référence que ci-dessus, p.39) qu'une fonction f n-fois dérivable sur un petit intervalle ouvert contenant un point $a \in \mathbb{R}$ admet un développement limité d'ordre n en a et on a même alors plus précisément quand $x \to a$ (formule de Taylor-Young) :

$$f(x) = \underbrace{f(a)}_{=f(a)\times(x-a)^0} + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3$$

$$+ \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)\,.$$

Il est très important de garder cette relation **ordonnée** et de **ne pas développer** les $(x-a)^k$ pour qu'elle reste significative.

C'est très analogue à l'écriture d'un chiffre en base 10 : on écrit $3.14 = 3 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2}$. Il ne vous viendrait pas à l'idée de "mélanger" ces chiffres : le 3 est plus significatif que le 1, qui lui-même est plus significatif que le 4 etc. On a de même quand $x \to a$

$$1 = (x-a)^0 \gg (x-a)^1 \gg (x-a)^2 \gg (x-a)^3 \gg \dots$$

$$\dots \gg (x-a)^n \gg o((x-a)^n)\,.$$

Exemple 5

En particulier, toujours quand $x \to a$, rechercher un développement limité à l'ordre 0 n'est rien d'autre qu'étudier la limite ou la continuité de la fonction f en a :

$$f \text{ admet un DL d'ordre } 0 \iff \lim_{x\to a} f(x) \text{ existe (et vaut alors } f(a))$$

$$\iff f \text{ est continue en } a \iff f(x) = f(a) + o(1)\,.$$

Comparaison en tout a dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$: cas général (suite)

De même à l'ordre 1, toujours quand $x \to a$, écrire un développement limité à l'ordre 1 n'est rien d'autre qu'étudier la dérivabilité d'une fonction f continue en a :

$$f \text{ admet un DL d'ordre 1} \iff \lim_{x \to a, x \neq a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe (=f'(a))}$$

$$\iff f \text{ dérivable en } a \iff \exists \ell \in \mathbb{R}, f(x) = f(a) + \ell \times (x - a) + o(x - a)$$

$$\text{(et alors } \ell = f'(a)) .$$

Comparaison en tout a dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$: cas général (suite)

Plus généralement, une conséquence directe des formules de Taylor est la proposition suivante (à très bien connaître et à savoir retrouver ou compléter) :

Proposition 5 (Développements limités usuels quand $x \to 0$)

$$\frac{1}{1-x} =_{x\to 0} 1+x+x^2+x^3+o(x^3), \qquad \frac{1}{1+x} =_{x\to 0} 1-x+x^2-x^3+o(x^3),$$

$$e^x =_{x\to 0} 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3), \qquad \ln(1+x) =_{x\to 0} x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

$$\sin(x) =_{x\to 0} x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), \qquad \cos(x) =_{x\to 0} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4),$$

$$(1+x)^\alpha =_{x\to 0} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

($\alpha \in \mathbb{R}$ *indépendant de* x).

Remarque 3

Moyen mnémotechnique pour la dernière formule : si $\alpha > 0$ est un entier, on a de façon *exacte* et pour tout x que

$$\begin{aligned}
&(1+x)^\alpha \\
&\quad = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{\alpha-1}x^{\alpha-1} + \binom{\alpha}{\alpha}x^\alpha \\
&\quad =_{x\to 0} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3)\,,
\end{aligned}$$

en appliquant la formule du binôme de Newton ($(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \ldots$) $(a+b)^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} a^k b^{\alpha-k}$ avec $a = 1$ et $b = x$ pour la première identité, tandis qu'on utilise

$$\binom{\alpha}{4}x^4 + \ldots + \binom{\alpha}{\alpha}x^\alpha = x^3\left(\underbrace{\binom{\alpha}{4}x + \ldots + \binom{\alpha}{\alpha}x^{\alpha-3}}_{\underset{x\to 0}{\to} 0 \iff =_{x\to 0} o(1)}\right) =_{x\to 0} o(x^3)\,.$$

Remarque 3 (suite)

Cette formule est donc claire pour $\alpha > 0$ entier et il est remarquable qu'elle reste vraie pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercices d'application

Les sommes et compositions de DL (permises par les résultats sur les o) sont un substitut avantageux aux sommes d'équivalents. Nous allons voir aussi (et en TD) comment ce point de vue permet de calculer assez facilement certaines limites délicates, en levant les *formes indéterminées*.

Exercice 1

Étudier $\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{\sin x}{x}$ et en déduire qu'on peut prolonger la fonction $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On appellera dorénavant *sinus cardinal*, notée sinc, cette fonction prolongée.

Solution de l'exercice 1 :

par la proposition 5, on a quand $x \to 0$ que $\sin x = x + o(x) = x(1 + o(1))$, et si de plus $x \neq 0$, on obtient $\frac{\sin x}{x} = \frac{\cancel{x}(1+o(1))}{\cancel{x}} = 1 + o(1) \to 1$, par définition de $o(1)$. On en déduit donc que $\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{\sin x}{x}$ existe et vaut 1 , puis que la fonction sinc donnée par $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $\mathrm{sinc}(0) = 1$ est continue sur tout $\mathbb{R}$ (en particulier en 0).

Exercice 2

Étudier $\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{e^x-1}{x}$.

Solution de l'exercice 2 :

par la proposition 5, on a quand $x \to 0$

$$e^x = 1 + x + o(x) \iff e^x - 1 = x + o(x) = x\left(1 + o(1)\right),$$

et, pour $x \neq 0$, on peut conclure de façon analogue à l'exercice 1 que $\frac{e^x-1}{x} = \frac{\cancel{x}(1+o(1))}{\cancel{x}} = 1 + o(1) \to 1$. La limite demandée existe donc bien et vaut 1.

Remarque 4

Les exercices 1 et 2 vous rappellent peut-être des souvenirs, même de terminale. Si oui, il est probable que vous ayez alors utilisé $\sin'(0) = 1 = \exp'(0)$ en faisant apparaître le *taux d'accroissement* associé à la dérivée en 0. La résolution courte et systématique des exercices précédents devraient commencer à vous convaincre de l'intérêt des développements limités.

Exercices d'application (suite)

Pour éviter toute erreur liée aux avertissements précédents sur les équivalents, une méthode sûre est de toujours calculer avec des développements limités, et, si besoin, de revenir seulement à la fin à la formulation avec les équivalents.

Exercice 3

Trouver un équivalent quand $x \to 0$ de

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} - \sin(x)\,.$$

En déduire la limite $\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

Solution de l'exercice 3 :

par la proposition 5, on a quand $x \to 0$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3).$$

Solution de l'exercice 3 (suite)

De même, on a quand $u \to 0$ que $1/(1-u) = 1 + u + u^2 + o(u^2)$; posant $u = x^2$ **qui tend bien vers** 0 quand $x \to 0$, on en déduit en remplaçant u par sa valeur x^2

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + o(x^4) = 1 + x^2 + x^3 \underbrace{(x + o(x))}_{\to 0 \iff = o(1)} = 1 + x^2 + o(x^3)\,.$$

Toujours par la proposition 5, on a enfin $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Au bilan, on peut écrire (toujours quand $x \to 0$)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} - \sin x \\
&= \left(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)\right) - \left(1 + x^2 + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\
&= \frac{7}{6}x^3 + o(x^3) = \frac{7}{6}x^3\,(1 + o(1)) \sim \frac{7}{6}x^3\,,
\end{aligned}$$

revenant simplement à la définition d'un équivalent à la toute fin. Du coup, on a bien $f(x)/x^2 = \frac{7}{6}x \times (1 + o(1)) \to 0$, quand $x \to 0, x \neq 0$.

L'une des difficultés lors de ces calculs est que la proposition 5 ne considère que des développements en 0. En fait, même si x tend vers une valeur finie autre que 0 ou même vers $\pm\infty$, on peut très souvent d'y ramener, comme on l'illustre dans les exercices suivants.

Exercice 4

Calculer la limite $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$.

Solution de l'exercice 4 :

on constate déjà qu'il s'agit bien d'une forme indéterminée (sinon, on n'a pas besoin d'aller chercher les développements limités et on peut se contenter d'utiliser les propriétés usuelles des limites). On procède ensuite par "étages". Quand $x \to +\infty$ comme ici, $\frac{1}{x} \to 0$ et il est donc opportun pour se ramener à la proposition 5 de poser $u = \frac{1}{x} \to 0$.

Attention :

comme la puissance $\alpha = x$ n'est pas constante, il est **incorrect** d'utiliser ici la formule $(1+u)^\alpha$ de la proposition 5, même si on a bien $u \to 0^+$ ici !

Solution de l'exercice 4 (suite)

On a par contre $x = 1/u$ d'où on a quand $x \to +\infty$
$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = (1+u)^{\frac{1}{u}} = \exp\left(\frac{1}{u}\ln(1+u)\right)$$

avec $u \to 0^+$. Grâce à cette dernière propriété cruciale $u \to 0^+$, on peut à nouveau appliquer la proposition 5 et écrire successivement :

$$\ln(1+u) = u + o(u)\,,$$

$$\frac{1}{u}\ln(1+u) = \frac{\cancel{u}(1+o(1))}{\cancel{u}} = 1 + o(1)\,,$$
$$\exp\left(\frac{1}{u}\ln(1+u)\right) = \exp(1+o(1)) \to e^1 = e\,.$$

D'où, la limite $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ existe et vaut e.

Exercice 5

Étudier la limite $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} + \frac{\sin(x-1)}{4}\right)$.

Solution de l'exercice 5 :

comme dans l'exercice précédent, on veut se ramener à une quantité qui tend vers 0 pour pouvoir appliquer la proposition 5, même si x ne tend pas lui-même vers 0. On pose alors $x = 1 + u \iff u = x - 1$ et on a bien que $u \to 0^+$ quand $x \to 1^+$ (NB : ce dernier est imposé par l'énoncé). On réécrit donc

$$\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} + \frac{\sin(x-1)}{4} = \frac{1}{2+u} - \frac{1}{2} + \frac{\sin u}{4}\,,$$

puis on écrit grâce à la proposition 5, maintenant légitime car $u \to 0$:

$$\frac{1}{2+u} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{u}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} + o(u^2)\right) = \frac{1}{2} - \frac{u}{4} + \frac{u^2}{8} + o(u^2)\,,$$

Solution de l'exercice 5 (suite) :

en utilisant la formule pour $\frac{1}{1+v}$ avec $v = \frac{u}{2} \to 0$. On a aussi $\sin u = u + o(u^2)$. On a donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+u} - \frac{1}{2} + \frac{\sin u}{4} &= \frac{1}{2} - \frac{u}{4} + \frac{u^2}{8} + o(u^2) - \frac{1}{2} + \frac{u}{4} + o(u^2) \\ &= \frac{u^2}{8}(1+o(1)) \left(\sim \frac{u^2}{8} \right),\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)^2}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} + \frac{\sin(x-1)}{4}\right) &= \frac{1}{u^2}\left(\frac{1}{2+u} - \frac{1}{2} + \frac{\sin u}{4}\right) \\ &= \frac{1+o(1)}{8} \to \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

D'où la limite considérée existe bien et vaut $\frac{1}{8}$.

Exercices d'application (suite)

On pourra aussi utiliser ces calculs pour décider de la convergence d'une série numérique (CF TMB), comme l'illustre l'exercice suivant.

Exercice 6

Montrer que la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est absolument convergente avec u_n donné par

$$u_n = \sqrt{\frac{n^2+n+1}{n}} - \sqrt{n+1}\,.$$

Indication : il suffira pour cela de montrer que $u_n = O(1/n^{3/2})$ *quand* $n \to +\infty$. [a]

---

a. Comme déjà vu, la propriété à montrer dit en particulier qu'il existe $C > 0$ tel que $|u_n| \leq C/n^{3/2}$ pour tout n ; cela donne bien la convergence de $\sum |u_n|$ en utilisant que $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est convergente et la proposition p.1 du cours en ligne de Math 3 sur les séries numériques.

Solution de l'exercice 6 :

comme toujours, on veut se ramener à la proposition 5 et pour cela faire apparaître une quantité pertinente qui tende vers 0 (dépendant de n auquel l'énoncé impose de tendre vers $+\infty$). En particulier, la dernière formule de cette proposition avec $\alpha = \frac{1}{2}$ donne quand $y \to 0$

$$\sqrt{1+y} = (1+y)^{1/2} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \underbrace{o(y^2)}_{=o(1)\times y^2} ,$$

(*il est recommandé de bien connaître ce cas particulier de la racine*). On écrit maintenant

$$u_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{n+1}{n^2}} - \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right) ,$$

d'où, posant d'abord $y = \frac{1}{n}$ qui tend bien vers 0 quand $n \to +\infty$, on a

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) ,$$

Solution de l'exercice 6 (suite) :

puis en posant $y = \frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ qui tend bien aussi vers 0, on a

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1 + \frac{n+1}{n^2}} \\
&= 1 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{n+1}{n^2}\right) - \frac{1}{8} \times \frac{1}{n^2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + o(1) \times \left(\left(\frac{n+1}{n^2}\right)^2\right), \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) - \frac{1}{8n^2}\Big(1 + \underbrace{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}_{=o(1)}\Big) + \underbrace{o(1) \times \frac{1}{n^2} \times (1 + o(1))}_{=o(1/n^2)}, \\
&= 1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit donc

$$u_n = \sqrt{n}\left(\left(\cancel{1 + \frac{1}{2n}} + \frac{3}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\cancel{1 + \frac{1}{2n}} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)$$

Solution de l'exercice 6 (suite) :

$$= \sqrt{n}\left(\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2n^{3/2}} \underbrace{(1+o(1))}_{=O(1) \text{ par exemple } 1} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Dans la suite du cours sur l'intégrale généralisée, on aura besoin d'étudier assez finement le comportement de fonctions qui tendent vers $\pm\infty$ en un point $a \in \mathbb{R}$ ($a = \frac{\pi}{2}$ dans l'exercice ci-dessous). Les outils de ce chapitre s'avèreront alors très utiles.

Exercice 7 (Autour du comportement de tan en $a = \frac{\pi}{2}$)

1. Donner la limite, puis un équivalent de $\tan x$ quand $x \to \frac{\pi}{2}^-$.
2. Étudier la limite $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}, x\neq\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x)}\left(\tan x + \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)$

Exercices d'application (suite)

Solution de l'exercice 7 :

(1) On a $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ pour $x \in \mathbb{R}$, $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. Toujours en vue de faire apparaître une quantité qui tende vers 0 quand $x \to \frac{\pi}{2}$ pour appliquer la proposition 5, on pose $x = \frac{\pi}{2} + u$, de sorte que $u \to 0$. On écrit alors (quand $x \to \frac{\pi}{2} \iff u \to 0$) :

$$\sin x = 1 + o(1) \text{ et } \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + u\right) = -\sin u = -u + o(u),$$

soit
$$\tan x = \frac{1 + o(1)}{-u(1 + o(1))} = -\frac{1}{u}(1 + o(1)) \sim -\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}},$$

en particulier, $\tan x \to +\infty$ quand $x \to \frac{\pi}{2}^-$.

(2) On vérifie avant de se lancer dans les calculs qu'on a bien à faire à une forme indéterminée (on soustrait exactement à la tan l'équivalent de la question précédente...). On va donc raffiner le calcul précédent en écrivant quand $x \to \frac{\pi}{2}, x \neq \frac{\pi}{2}$ ($\iff u \to 0, u \neq 0$) :

Exercices d'application (suite)

Solution de l'exercice 7 (suite) :

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2}+u\right) = \cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \text{ et}$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2}+u\right) = -\sin u = -u + \frac{1}{6}u^3 + o(u^3)\,,$$

$$\begin{aligned}\text{d'où }\ \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1-\frac{u^2}{2}+o(u^2)}{-u+\frac{1}{6}u^3+o(u^3)}\\ &= -\frac{1}{u}\left(1-\frac{u^2}{2}+o(u^2)\right)\times\frac{1}{1-\frac{1}{6}u^2+o(u^2)}\,,\end{aligned}$$

avec (posant $v = \frac{1}{6}u^2 + o(u^2) \to 0$)

$$\frac{1}{1-\frac{1}{6}u^2+o(u^2)} = \frac{1}{1-v} = 1 + v + o(v) = 1 + \frac{1}{6}u^2 + o(u^2)\,,$$

soit au bilan $\tan x = -\frac{1}{u}\left(1-\frac{u^2}{2}+o(u^2)\right) \times \left(1+\frac{1}{6}u^2+o(u^2)\right)$,

Solution de l'exercice 7 (suite) :

$$= -\frac{1}{u}\left(1 + u^2\left(\underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}}_{=-\frac{1}{3}}\right) + o(u^2) \times O(1) - \underbrace{\frac{u^4}{12}}_{=o(u^2)}\right) = -\frac{1}{u} + \frac{u}{3} + o\left(u^1\right)$$

car $\frac{1}{u} \times o(u^2) = \frac{1}{u} \times o(1) \times u^2 = o(u)$. Pour conclure, on écrit

$$\tan x + \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} = -\cancel{\frac{1}{u}} + \frac{u}{3} + o\left(u\right) + \cancel{\frac{1}{u}} = u\left(\frac{1}{3} + o(1)\right) ,$$

et comme on a vu ci-dessus $\cos x = -u + o(u) = u(-1 + o(1))$, on a

$$\frac{1}{\cos x}\left(\tan x + \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\cancel{u}\left(\frac{1}{3} + o(1)\right)}{\cancel{u}(-1 + o(1))} \to -\frac{1}{3} .$$

Pour conclure, la limite existe et vaut $-\frac{1}{3}$.

Merci de votre attention !