

**Fiche 1**

## SUITES DE FONCTIONS

**Exercice 1. Convergence simple et uniforme**

On étudie les suites de fonctions réelles définies par  $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{x}{x+n} + \arctan(x)$  et  $g_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{nx}{1+nx}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Les suites de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  convergent-elles simplement sur  $[0, 1]$  ?
2. Convergent-elles uniformément sur  $[0, 1]$  ? Sur  $]0, 1]$  ? Soit  $a \in ]0, 1[$ . Convergent-elles uniformément sur  $[a, 1]$  ?
3. Convergent-elles simplement et uniformément sur  $[1, +\infty[$  ?

**Exercice 2.** On considère, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les fonctions  $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$f_n(x) = \sin(nx^2) \exp(-nx^2).$$

1. Montrer que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $[-1, 1]$  vers une fonction  $f$  que l'on déterminera.
2. Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .
3. Montrer que pour tout  $0 < a < 1$ ,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, 1]$ .

**Exercice 3.** On considère la suite de fonctions définies sur  $[0, 1]$  par  $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{1+x^n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Étudier la convergence uniforme de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $[0, 1]$ , puis sur  $[0, 1[$ , puis sur  $[0, a]$  avec  $0 < a < 1$ .**Exercice 4.** On considère la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies sur  $[0, 1[$  par

$$f_n(x) = \min \left( n, \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right).$$

1. Montrer que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $[0, 1[$  vers une fonction  $f$  que l'on précisera.
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer (si elle existe) la limite  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x)$ .
3. Que peut-on en conclure sur la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

**Exercice 5. Convergence et intégrales**

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définies sur  $[0, 1]$  par  $f_n(x) = \frac{2^n x}{1+2^n n x^2}$ .

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions sur  $[0, 1]$ .
2. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ . En déduire que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas uniformément convergente sur  $[0, 1]$ .
3. Donner une démonstration directe de ce que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas uniformément convergente sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 6.** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite de fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_n(x) = \frac{n e^{-x} + x^2}{n + x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$ . Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est uniformément convergente sur le segment  $[a, b]$ .
3. Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne converge pas uniformément sur  $[a, +\infty[$ .
4. Calculer la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$  de  $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .

**Exercice 7.** Soit  $(f_n)_{n \geq 2}$  la suite de fonctions définies sur  $[0, 1]$  par

$$f_n(x) = \begin{cases} -n^3 x^2 + 2n^2 x & \text{si } x \in [0, \frac{2}{n}] ; \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{2}{n}, 1]. \end{cases}$$

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.

2. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

3. En déduire que  $(f_n)_n$  ne converge pas uniformément sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 8.** Soit  $(f_n)_{n \geq 1}$  la suite de fonctions définies par

$$\begin{array}{ccc} f_n : & \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto \cos^n(x) \sin(x). \end{array}$$

1. Montrer que  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

2. On considère la suite de fonctions  $(g_n)_{n \geq 1}$  définies par  $g_n = (n+1)f_n$ . Montrer que sur tout intervalle de la forme  $\left[\delta, \frac{\pi}{2}\right]$  avec  $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ ,  $(g_n)_n$  converge uniformément vers la fonction nulle, mais que pourtant, la suite

$$\left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

ne tend pas vers 0.

Que peut-on conclure sur la suite  $(g_n)_{n \geq 1}$  ?

**Exercice 9. Convergence dominée**

Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

$$1. u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan(x))^n dx,$$

$$2. v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + e^x} dx.$$

**Exercice 10.** Déterminer les limites suivantes :

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \arctan(nx) e^{-x^n} dx,$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n \sqrt[3]{1+x^n}}.$$

**Exercice 11.** Déterminer la limite, quand  $n \rightarrow +\infty$ , de  $\int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$ .

*Indication : on pourra utiliser, après l'avoir démontrée, l'inégalité  $\ln(1+u) \leq u$  pour tout  $u \geq 0$ .*

**Exercice 12.** Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue et intégrable.

Déterminer la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de  $n \int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t} dt$ .

**Exercice 13.** Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ .

**Exercice 14. Convergence uniforme et dérivées**

Soit  $(g_n)_{n \geq 1}$  la suite de fonctions définies sur  $[-1, 1]$  par  $g_n(x) = \frac{x}{1+n^2 x^2}$ .

1. Montrer que  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur  $[-1, 1]$  vers la fonction nulle.

2. Étudier la convergence de  $(g'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sur  $[-1, 1]$ .

3. On considère la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie sur  $[-1, 1]$  par  $f_n(x) = \frac{\ln(1+n^2 x^2)}{2n^2}$ . Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur  $[-1, 1]$  vers 0.

**Exercice 15.** On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \sqrt{n} \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$ .

1. Étudier les modes de convergence de la suite  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

2. En déduire que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur tout sous-ensemble borné de  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $f$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  à déterminer.

3. Montrer que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne converge pas uniformément sur  $\mathbb{R}$ .