Vrai ou Faux ? A propos du CM du 21/03

Analyse 4
28/03/2025

Vrai/Faux 1 - Dérivée d'une composée

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(t) = f\left(\sin(t), \cos(t)\right).$$

Alors on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h'(t) = \left\langle \nabla_{(\sin(t),\cos(t))} f, (\cos(t), -\sin(t)) \right\rangle$$

Vrai/Faux 1 - Dérivée d'une composée

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(t) = f\left(\sin(t), \cos(t)\right).$$

Alors on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h'(t) = \left\langle \nabla_{(\sin(t),\cos(t))} f, (\cos(t), -\sin(t)) \right\rangle$$

VRAI. C'est une application de la formule donnant la dérivée d'une composée : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$h'(t) = \cos(t)\partial_1 f(\sin(t), \cos(t)) - \sin(t)\partial_2 f(\sin(t), \cos(t))$$

qui est bien égal au produit scalaire écrit plus haut.

Vrai/Faux 2 - Différentielle d'une composée

Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ différentiable et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = g(z, x, y).$$

Alors on a, pour tout $x_0 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et tout $h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$D_{x_0} f(h) = \partial_2 g(x_0) h_1 + \partial_3 g(x_0) h_2 + \partial_1 g(x_0) h_3.$$

Vrai/Faux 2 - Différentielle d'une composée

Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ différentiable et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = g(z, x, y).$$

Alors on a, pour tout $x_0 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et tout $h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$D_{x_0} f(h) = \partial_2 g(x_0) h_1 + \partial_3 g(x_0) h_2 + \partial_1 g(x_0) h_3.$$

FAUX. Les dérivées partielles de g doivent être calculées au point (z, x, y), et non plus en x_0. On a donc

$$D_{x_0} f(h) = \partial_2 g(z, x, y) h_1 + \partial_3 g(z, x, y) h_2 + \partial_1 g(z, x, y) h_3.$$

Vrai/Faux 3 - Plan tangent

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable et (S) la surface d'équation $z = f(x, y)$. Alors le plan tangent à (S) en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ a pour équation

$$z = D_{(x_0,y_0)} f(x - x_0, y - y_0)$$

Vrai/Faux 3 - Plan tangent

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable et (S) la surface d'équation $z = f(x, y)$. Alors le plan tangent à (S) en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ a pour équation

$$z = D_{(x_0,y_0)} f(x - x_0, y - y_0)$$

FAUX. L'équation de ce plan est donné par $z = P(x - x_0, y - y_0)$ où P est le polynôme de Taylor d'ordre 1 de f en (x_0, y_0), c'est à dire

$$\begin{aligned} z &= f(x_0, y_0) + D_{(x_0,y_0)} f(x - x_0, y - y_0) \\ &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \times (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \times (y - y_0). \end{aligned}$$

Vrai/Faux 4 - Différentielle seconde

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$.
Alors on a, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 3,$$

et donc, pour tout $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$D^2_{(x,y)} f(h,h) = 2h_1^2 + 2h_2^2 + 6h_1 h_2 = 2f(h_1, h_2).$$

Vrai/Faux 4 - Différentielle seconde

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$.
Alors on a, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 3,$$

et donc, pour tout $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$D^2_{(x,y)} f(h, h) = 2h_1^2 + 2h_2^2 + 6h_1 h_2 = 2f(h_1, h_2).$$

VRAI. En effet, la hessienne de f en (x, y), qui est donc la matrice de l'application bilinéaire $D^2_{(x,y)} f$, est

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

de sorte que $D^2_{(x,y)} f(h, h) = {}^t h H_f(x, y) h = \langle H_f(x, y) h, h \rangle$.