

Vrai ou Faux ? A propos du CM du 28/02

Analyse 4
21/03/2025



Lyon 1

Vrai/Faux 1 - Dérivées directionnelles

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, alors f admet une dérivée directionnelle suivant tout vecteur non-nul.

Vrai/Faux 1 - Dérivées directionnelles

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, alors f admet une dérivée directionnelle suivant tout vecteur non-nul.

FAUX. C'est le contraire ! Si f admet une dérivée directionnelle suivant tout vecteur, cela veut dire que

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \quad \text{existe.}$$

Donc, en particulier, pour tout $1 \leq i \leq n$, f admet une dérivée directionnelle suivant chacun des vecteurs de base $e_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x_0 + t(0, \dots, 1, 0, \dots, 0)) - f(x_0)}{t} \quad \text{existe.}$$

Vrai/Faux 2 - Dérivées partielles

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, alors f est continue en x_0 .

Vrai/Faux 2 - Dérivées partielles

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, alors f est continue en x_0 .

FAUX. On a donné un contre-exemple en CM, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui admet des dérivées partielles en $x_0 = (0, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

mais f n'est pas continue en $(0, 0)$ car $f(x, \sqrt{x}) \rightarrow 1 \neq 0 = f(0, 0)$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Vrai/Faux 3 - Implications

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in \Omega$, alors on a

$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ existe pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ existe

$\Rightarrow D_{x_0} f$ existe

Vrai/Faux 3 - Implications

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in \Omega$, alors on a

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \text{ existe pour tout vecteur } v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \text{ existe}$$

$$\Rightarrow D_{x_0} f \text{ existe}$$

FAUX. La première implication est correcte (Vrai/Faux 1), mais l'existence des dérivées partielles n'implique pas la différentiabilité ! On a plutôt

$$D_{x_0} f \text{ existe} \Rightarrow \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \text{ existe} \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \text{ existe}$$

Vrai/Faux 4 - Calcul d'une différentielle

Soit $\Omega = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in \Omega, \quad f(x, y, z) = \frac{e^z}{x} y.$$

f est différentiable et on a, $\forall X = (x, y, z) \in \Omega$, $\forall h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$D_X f(h) = -\frac{e^z}{x^2} y h_1 + \frac{e^z}{x} h_2 + \frac{e^z}{x} y h_3$$

Vrai/Faux 4 - Calcul d'une différentielle

Soit $\Omega = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in \Omega, \quad f(x, y, z) = \frac{e^z}{x} y.$$

f est différentiable et on a, $\forall X = (x, y, z) \in \Omega$, $\forall h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$D_X f(h) = -\frac{e^z}{x^2} y h_1 + \frac{e^z}{x} h_2 + \frac{e^z}{x} y h_3$$

VRAI. f est différentiable comme quotient et produit de fonctions différentiables dont le dénominateur ne s'annule pas sur Ω . Ainsi, $\forall X = (x, y, z) \in \Omega$, $\forall h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$D_X f(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(X) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(X) h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(X) h_3 = -\frac{e^z}{x^2} y h_1 + \frac{e^z}{x} h_2 + \frac{e^z}{x} y h_3$$

Un outil de partage prof-étudiant.e.s : la boîte "MATH"

Une boîte où vous pouvez déposer, à chaque CM, écrit sur une feuille, anonyme ou pas, quelque chose en rapport avec :

- les **M**athématiques

Des questions techniques/conceptuelles en lien avec l'UE.

- vos **A**ttentes

Réexpliquer quelque chose en CM, exercices en plus, etc.

- des **T**émoignages

CM/TD, camarade qui a des problèmes.

- vos **H**umeurs

Exprimer votre ressenti du jour, si vous allez bien ou pas, etc.

BUT : permettre une meilleure communication/compréhension mutuelle.

Evidemment, vous pouvez toujours prendre rendez-vous avec moi ou me poser des questions lors des pauses/fins des CM/TD.