Vrai ou Faux ? A propos du CM du 14/02

Analyse 4
21/02/2025

Vrai/Faux 1 - Continuité et façons d'approcher un point

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ telle que $f(0, ..., 0) = 1$. Alors si

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{1}{x}, ..., \frac{1}{x}\right) = 1$,
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(e^{-x}, ..., e^{-x}\right) = 1$,

alors, quand $x \to +\infty$, $\left(\frac{1}{x}, ..., \frac{1}{x}\right)$ et $\left(e^{-x}, ..., e^{-x}\right)$ tendent vers $(0, ..., 0)$ et donc f est continue en $(0, ..., 0)$.

Vrai/Faux 1 - Continuité et façons d'approcher un point

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ telle que $f(0, ..., 0) = 1$. Alors si

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{1}{x}, ..., \frac{1}{x}\right) = 1$,
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(e^{-x}, ..., e^{-x}\right) = 1$,

alors, quand $x \to +\infty$, $\left(\frac{1}{x}, ..., \frac{1}{x}\right)$ et $\left(e^{-x}, ..., e^{-x}\right)$ tendent vers $(0, ..., 0)$ et donc f est continue en $(0, ..., 0)$.

FAUX. Il faudrait que **pour tout chemin $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$** qui tend vers $(0, ..., 0)$ en l'infini, on ait

$$\lim_{x \to +\infty} f(\gamma(x)) = 1.$$

Vrai/Faux 2 - Application linéaire

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire, alors, comme pour tout $x \neq 0$, $y = \frac{x}{\|x\|_2} \in S(0,1)$, on a

$$\sup_{y \in S(0,1)} \|f(y)\|_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right) \right\|_2 \quad \text{est fini.}$$

Vrai/Faux 2 - Application linéaire

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire, alors, comme pour tout $x \neq 0$, $y = \frac{x}{\|x\|_2} \in S(0,1)$, on a

$$\sup_{y \in S(0,1)} \|f(y)\|_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right) \right\|_2 \quad \text{est fini.}$$

VRAI. On a démontré que pour toute application linéaire f, il existe $k > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|f(x)\|_2 \leq k\|x\|_2,$$

ce qui veut dire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a, par homogénéité de la norme et linéarité de f,

$$0 \leq \frac{\|f(x)\|_2}{\|x\|_2} = \left\| \frac{f(x)}{\|x\|_2} \right\|_2 = \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right) \right\|_2 \leq k,$$

et donc que $\sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}} \frac{\|f(x)\|_2}{\|x\|_2}$ existe et est fini.

Pour aller un peu plus loin...

Avez-vous remarqué que l'ensemble des matrices réelles $n \times n$, noté $M_n(\mathbb{R})$, est en bijection avec $\mathbb{R}^{n^2}$?

Ainsi, on peut munir $M_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne

$$\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2}$$

On peut même faire de la Topologie sur l'espace des matrices !

Vrai/Faux 3 - Matrices inversibles

$GL_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

Vrai/Faux 3 - Matrices inversibles

$GL_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

FAUX. Il s'agit d'un OUVERT car

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) : \det M \neq 0\} = \{M \in M_n(\mathbb{R}) : \det M \in \mathbb{R}^*\}.$$

Or on sait que :

1. L'ensemble $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$,
2. L'application $M \mapsto \det M$ est continue car polynomiale en les coefficients de M.

On a donc $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ qui est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$ comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.

Remarque : On peut montrer que $\boldsymbol{\overline{GL_n(\mathbb{R})} = M_n(\mathbb{R})}$ en remarquant que, $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $\exists P \in \mathbb{N}$, $\forall p \geq P$, $M - \frac{1}{p} I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ et tend vers M.

Vrai/Faux 4 - Groupe orthogonal

$O_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

Vrai/Faux 4 - Groupe orthogonal

$O_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

VRAI. En effet, on a

$$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) : \ {}^tMM = I_n\} = f^{-1}(\{I_n\})$$

avec $f : M \mapsto \ {}^tMM$ qui est continue (multiplications/additions de coeffients de M) et $\{I_n\}$ qui est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$.

Donc $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

Remarque : On peut montrer que $\boldsymbol{O_n(\mathbb{R})}$ **est compact**, puisque borné. En effet, les colonnes de toute matrice M de $O_n(\mathbb{R})$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, et donc $\|M\|_2 \leq C$ pour une certaine constante C indépendante de M.