Vrai ou Faux ? A propos du CM du 07/02

Analyse 4
14/02/2025

Vrai/Faux 1 - Intérieur et adhérence

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\mathring{A} \neq \emptyset$.
Alors il existe des points à la fois intérieurs et adhérents à A.

Vrai/Faux 1 - Intérieur et adhérence

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\mathring{A} \neq \emptyset$.
Alors il existe des points à la fois intérieurs et adhérents à A.

VRAI. En effet, tous les points de $\mathring{A}$ sont adhérents à A car

$$\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}.$$

Dit autrement : si $x \in \mathring{A}$, alors nécessairement $x \in A$ et donc il existe une suite $(x_k = x)_k \subset A$ qui converge (évidemment) vers x.

Vrai/Faux 1 - Intérieur et adhérence

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\mathring{A} \neq \emptyset$.
Alors il existe des points à la fois intérieurs et adhérents à A.

VRAI. En effet, tous les points de $\mathring{A}$ sont adhérents à A car

$$\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}.$$

Dit autrement : si $x \in \mathring{A}$, alors nécessairement $x \in A$ et donc il existe une suite $(x_k = x)_k \subset A$ qui converge (évidemment) vers x.

Par contre, il existe des points adhérents qui ne sont pas intérieurs à A, ce sont les points du bord $\partial A = \overline{A} \backslash \mathring{A}$.

Exemple : si $A = [0, 1[$, *alors* 1 *est adhérent à* A *car* $(1 - \frac{1}{k})_{k \geq 1} \subset A$ *et tend vers* 1, *mais* $1 \notin A$, *donc a fortiori* $1 \notin \mathring{A} =]0, 1[$.

Vrai/Faux 2 - Extérieur d'un compact

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact et $x_0 \notin K$, alors x_0 est un point extérieur à K.
Rappel : l'extérieur de K est l'intérieur de son complémentaire.

Vrai/Faux 2 - Extérieur d'un compact

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact et $x_0 \notin K$, alors x_0 est un point extérieur à K.
Rappel : l'extérieur de K est l'intérieur de son complémentaire.

VRAI. On rappelle que l'extérieur de K est l'intérieur de $\mathbb{R}^n \backslash K$.

$$K \text{ compact} \Rightarrow K \text{ fermé} \iff \mathbb{R}^n \backslash K \text{ ouvert} \iff \overbrace{\mathbb{R}^n \backslash K}^{\circ} = \mathbb{R}^n \backslash K.$$

Ce qu'il faut retenir : $x_0 \notin A$ extérieur à A si et seulement si A fermé.

Vrai/Faux 3 - Adhérence des entiers relatifs

On a $\overline{\mathbb{Z}} = \emptyset$.

Vrai/Faux 3 - Adhérence des entiers relatifs

On a $\overline{\mathbb{Z}} = \emptyset$.

FAUX. Comme

$$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n, n+1[,$$

alors $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ est ouvert comme réunion d'ouverts, et donc $\mathbb{Z}$ est fermé, et donc $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.

Par contre : on a $\mathring{\mathbb{Z}} = \emptyset$ puisque tout intervalle ouvert centré en un entier contient un réel non-entier.

Vrai/Faux 4 - Union infinie de compacts

Il existe une union infinie de compacts de $\mathbb{R}^n$ qui n'est PAS compacte.

Vrai/Faux 4 - Union infinie de compacts

Il existe une union infinie de compacts de $\mathbb{R}^n$ qui n'est PAS compacte.

VRAI. Il suffit de considérer

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} \overline{B}(0,j) = \mathbb{R}^n$$

qui n'est pas un compact alors que, $\forall j \in \mathbb{N}$, $K_j = \overline{B}(0,j)$ est compact en tant que fermé-borné par le théorème de Heine-Borel.