Vrai ou Faux ? A propos du CM du 04/04

Analyse 4
11/04/2025

Vrai/Faux 1 - Point selle

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable au point $(1,1,1)$ tel que $\nabla_{(1,1,1)} f = (0,0,0)$ et

$$H_f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

alors f admet au point $(1,1,1)$ un point selle.

Vrai/Faux 1 - Point selle

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable au point $(1,1,1)$ tel que $\nabla_{(1,1,1)} f = (0,0,0)$ et

$$H_f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

alors f admet au point $(1,1,1)$ un point selle.

VRAI. Les valeurs propres de $H_f(1,1,1)$ sont $\{-2,0,1\}$. 1 et -2 sont de signes opposés, donc f admet au point $(1,1,1)$ un point selle.

Dès que x_0 est un point critique de f et que
deux valeurs propres de $H_f(x_0)$ sont de signes opposés,
f admet un point selle en x_0.

Vrai/Faux 2 - Question de parité

Soit n impair, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\nabla_{x_0} f = (0, ..., 0), \quad \det(H_f(x_0)) > 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(H_f(x_0)) < 0,$$

alors on ne peut rien conclure quant à la nature de x_0.

Vrai/Faux 2 - Question de parité

Soit n impair, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\nabla_{x_0} f = (0, ..., 0), \quad \det(H_f(x_0)) > 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(H_f(x_0)) < 0,$$

alors on ne peut rien conclure quant à la nature de x_0.

FAUX. $\boldsymbol{x_0}$ **est un point selle de** $\boldsymbol{f}$. En effet, on sait que

- x_0 est un point critique de f ;
- $\det(H_f(x_0)) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$ où $\{\lambda_i\}_i$ sont les valeurs propres de $H_f(x_0)$, donc aucune n'est nulle.
- $\mathrm{Tr}(H_f(x_0)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < 0$, donc
  - $\mathrm{Tr}(H_f(x_0)) < 0 \Rightarrow \exists i,\ \lambda_i < 0$;
  - $\det(H_f(x_0)) > 0 \Rightarrow \exists I \subset \{1, ..., n\},\ \sharp I \in 2\mathbb{N}^*,\ \forall i \in I,\ \lambda_i < 0$;
  - n est impair $\Rightarrow \exists j \in I,\ \lambda_j > 0$.

Vrai/Faux 3 - Lien entre des concepts

Soit $k \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Si f est k fois différentiable sur Ω, alors $f \in C^{k-1}(\Omega)$.

Vrai/Faux 3 - Lien entre des concepts

Soit $k \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Si f est k fois différentiable sur Ω, alors $f \in C^{k-1}(\Omega)$.

VRAI. Si f est k fois différentiable, alors

- toutes les différentielles d'ordre $j \in \{1, ..., k-1\}$ sont différentiables, donc continues ;
- donc toutes les dérivées partielles d'ordre $j \in \{1, ..., k-1\}$ sont aussi continues.

D'où le fait que $f \in C^{k-1}(\Omega)$.

Vous pouvez donc rajouter les implications correspondantes sur le résumé de cours !

Vrai/Faux 4 - Développement de Taylor-Young

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $(1, -1) \in \Omega$ tel que, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ suffisamment petits, quand $(h, k) \to (0, 0)$,

$$f(1 + h, -1 + k) = -5 - 2h^2 - 5k^2 + o(h^2 + k^2),$$

alors f admet un maximum local strict au point $(1, -1)$.

Vrai/Faux 4 - Développement de Taylor-Young

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $(1, -1) \in \Omega$ tel que, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ suffisamment petits, quand $(h, k) \to (0, 0)$,

$$f(1 + h, -1 + k) = -5 - 2h^2 - 5k^2 + o(h^2 + k^2),$$

alors f admet un maximum local strict au point $(1, -1)$.

VRAI. Le développement ci-dessus est celui de Taylor-Young à l'ordre 2, on peut donc lire que :

- $f(1, -1) = -5$;
- $\nabla_{(1,-1)} f = (0, 0)$, donc $(1, -1)$ est un point critique de f ;
- Pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, $D^2_{(1,-1)} f((h, k), (h, k)) = -2h^2 - 5k^2 \leq 0$ avec égalité si et seulement si $(h, k) = (0, 0)$, donc $H_f(1, -1)$ est définie négative et f admet bien un maximum local strict en $(1, -1)$.

A déposer (éventuellement) dans la boîte MATH

1. **Révisions.** Si vous souhaitez réviser quelque chose de particulier (pour cela, regardez avant à quoi ressemble les CT des années précédentes)
2. **CT Analyse 4.** Comment vous appréhendez ce futur CT : confiant.e ? anxieux/anxieuse ? avec l'impression qu'il vous reste beaucoup de travail à faire ?
3. **Examens, futur.** Comment vous appréhendez les examens de manière générale, mais aussi votre rentrée en septembre (que ce soit en L3 ou autre).