Vrai ou Faux ? A propos du CM du 31/01

Analyse 4
07/02/2025

Vrai/Faux 1

Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\delta > 0$, alors

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 \leq \delta\right\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Vrai/Faux 1

Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\delta > 0$, alors

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 \leq \delta\right\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

FAUX. Il s'agit de la boule fermée $\overline{B}_{\|\cdot\|_2}(a, \sqrt{\delta})$ car

$$\begin{aligned}(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 \leq \delta \iff& \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} \leq \sqrt{\delta} \\ \iff& \|x - a\|_2 \leq \sqrt{\delta}\end{aligned}$$

et donc $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\|_2 \leq \sqrt{\delta}\} = \overline{B}_{\|\cdot\|_2}(a, \sqrt{\delta})$ est fermée.

Vrai/Faux 2

L'ensemble $B \subset \mathbb{R}^3$ défini par

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \max(|x|, |y-1|, |z+2|) \geq 3\}$$

est un fermé de $\mathbb{R}^3$.

Vrai/Faux 2

L'ensemble $B \subset \mathbb{R}^3$ défini par

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \max(|x|, |y-1|, |z+2|) \geq 3\}$$

est un fermé de $\mathbb{R}^3$.

VRAI. On remarque que $B = B_{\|\cdot\|_\infty}((0,1,-2),3)^c$.

Comme $B_{\|\cdot\|_\infty}((0,1,-2),3)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ – car c'est une boule ouverte – on en déduit que B est un fermé de $\mathbb{R}^3$.

Vrai/Faux 3

Soit $(a_k)_k \subset \mathbb{R}$ et $(b_k)_k \subset \mathbb{R}$ deux suites telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k < b_k$, alors l'ensemble

$$\Omega = \bigcap_{k \in \mathbb{N}}]a_k, b_k[$$

est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Vrai/Faux 3

Soit $(a_k)_k \subset \mathbb{R}$ et $(b_k)_k \subset \mathbb{R}$ deux suites telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k < b_k$, alors l'ensemble

$$\Omega = \bigcap_{k \in \mathbb{N}}]a_k, b_k[$$

est un ouvert de $\mathbb{R}$.

FAUX en général. $\Omega = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right[= \{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Vrai/Faux 3

Soit $(a_k)_k \subset \mathbb{R}$ et $(b_k)_k \subset \mathbb{R}$ deux suites telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k < b_k$, alors l'ensemble

$$\Omega = \bigcap_{k \in \mathbb{N}}]a_k, b_k[$$

est un ouvert de $\mathbb{R}$.

FAUX en général. $\Omega = \displaystyle\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right[= \{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Par contre,

- $\displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{N}}]a_k, b_k[$ et $\displaystyle\bigcap_{k=k_1}^{k_2}]a_k, b_k[$ sont toujours des ouverts de $\mathbb{R}$;
- il est possible qu'une intersection infinie d'ouverts soit un ouvert :

$$\Omega = \bigcap_{k \in \mathbb{N}}]k, k+1[= \emptyset$$

Vrai/Faux 4

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue et

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in [0, 1]\} = f^{-1}([0, 1]),$$

alors C est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Vrai/Faux 4

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue et

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in [0,1]\} = f^{-1}([0,1]),$$

alors C est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

VRAI. Il suffit d'utiliser **la caractérisation séquentielle des fermés**. Soit $(x_k)_k \subset C$ qui converge vers $x \in \mathbb{R}^n$. Alors :

- Comme f est continue et $x_k \to x$, on a $f(x_k) \to f(x)$;
- Comme $(x_k)_k \subset C$, on a que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f(x_k) \in [0,1].$$

  La suite $(f(x_k))_k \subset [0,1]$ converge vers $f(x)$, et comme $[0,1]$ est fermé, $f(x) \in [0,1]$, donc $x \in C$.

On en déduit donc que C est fermé.