Feuille 6 : Extrema
CORRECTION

Exercice 1. Preuve fausse à corriger
Déterminer toutes les erreurs commises dans la preuve ci-dessous et la corriger.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^4 + y^4$. Montrons que f admet au point $(1,2)$ un minimum local. En effet, on trouve facilement que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$. Ainsi, la Hessienne de f au point $(1,2)$ est diagonale avec des coefficients strictement positifs, donc définie positive. On en déduit que f admet au point $(1,2)$ un minimum local.
Correction. Les erreurs sont les suivantes :

1. Le calcul des dérivées partielles secondes est fausse. En effet, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0.$$
2. Il est vrai que la hessienne au point $(1,2)$ est diagonale avec des coefficients positifs puisque
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) = 12 > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2) = 48 > 0.$$
Mais comme le point $(1,2)$ n'est pas un point critique car
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 4 \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 32 \neq 0,$$
f n'admet pas de minimum local au point $(1,2)$. Le seul minimum local (global en fait) est $(0,0)$ car
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^4 + y^4 \geq 0$$
avec égalité si et seulement si $(x,y) = (0,0)$. Notons aussi que $\nabla_{(x,y)} f = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)$ et donc que $(0,0)$ est le seul point critique, donc le seul extremum local de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Extrema de polynômes
Déterminer les extrema des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x+y)^2$
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto 1 + 2y - 3y^2 + 2xz - 3z^2$

Correction.

1. Déterminons les points critiques de f. Les dérivées partielles premières de f en (x,y) sont
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4(x+y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 4(x+y),$$
et le système d'équations des points critiques est donné par
$$\nabla_{(x,y)} f = 0 \iff 4x^3 - 4(x+y) = 4y^3 - 4(x+y) = 0$$
On a donc nécessairement $x^3 = y^3$ c'est-à-dire $x = y$, et on obtient $4x^3 - 8x = 0$, donc $4x(x^2-2) = 0$ et donc $x = 0$ ou $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$. On obtient ainsi les points critiques
$$(0,0), \quad (\sqrt{2}, \sqrt{2}), \quad (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

Déterminons la hessienne de f en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & -4 \\ -4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

On trouve ainsi

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}, \quad H_f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = H_f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & -4 \\ -4 & 20 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de $H_f(0, 0)$ est

$$P_0(X) = (-4 - X)^2 - 4^2 = X^2 + 8X = X(X + 8),$$

donc les valeurs propres de $H_f(0, 0)$ sont 0 et -8. On ne peut pas conclure directement.
Alternativement, on calcule le déterminant de cette hessienne, qui vaut 0, ce qui veut dire que le produit de ses valeurs propres est nul, donc que l'une des valeurs propres est nulle, donc on ne peut pas conclure.
Soit $x \in \mathbb{R}$, calculons

$$f(x, x) = 2x^4 - 8x^2 = 2x^2(x^2 - 4) \leq 0$$

au voisinage de $x = 0$. Par contre, on a

$$f(x, -x) = 2x^4 \geq 0,$$

donc $(0, 0)$ est un point selle de f.
Le polynôme caractéristique de $H_f(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ est

$$P_{\sqrt{2}}(X) = (20 - X)^2 - 4^2 = (20 - X - 4)(20 - X + 4) = (16 - X)(24 - X),$$

donc les valeurs propres de $H_f(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sont $16 > 0$ et $24 > 0$, donc $H_f(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ est définie positive et ainsi f admet aux points $\pm(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ des minima locaux.
Alternativement, on calcule le déterminant de cette hessienne, qui vaut $384 > 0$ et sa trace qui vaut $40 > 0$. Ainsi, grâce au déterminant on en déduit que les deux valeurs propres ont même signe, et qu'elles sont donc strictement positives puisque la trace est strictement positive.
Comme, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 + y^2 \geq 2xy$, on obtient

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x+y)^2 = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 - 4xy \geq x^4 + y^4 - 4x^2 - 4y^2 = (x^2 - 2)^2 + (y^2 - 2)^2 - 8$$

alors, par comparaison, $\lim\limits_{\|(x,y)\|_2 \to +\infty} f(x, y) = +\infty$, donc les points $\pm(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sont des minimiseurs globaux de f.

2. Les dérivées partielles de f en $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2z, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2 - 6y, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2x - 6z$$

et donc le système d'équations donnant les points critiques est

$$\nabla_{(x,y,z)} f = 0 \iff 2z = 2 - 6y = 2x - 6z = 0.$$

On obtient donc $z = 0$, puis $x = 0$ et $y = \frac{1}{3}$, donnant l'unique point critique

$$\left(0, \frac{1}{3}, 0\right).$$

En tout point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la hessienne de f est donnée par

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

de polynôme caractéristique

$$P(X)=\det(XI_3-H_f(x,y,z))=\det\begin{pmatrix} X & 0 & -2\\ 0 & 6+X & 0\\ -2 & 0 & 6+X\end{pmatrix}=X^3+12X^2+32X-24.$$

Comme on a $X^3+12X^2+32X-24=(X+6)(X^2+6X-4)$ alors les valeurs propres sont les solutions de $X+6=0$, c'est-à-dire $X=-6>0$ et $X^2+6X-4=0$, c'est-à-dire $X=-3+\sqrt{13}>0$ et $X=-3-\sqrt{13}<0$. Ainsi, le point $(0,1/3,0)$ est un point selle pour f.
Alternativement : la déterminant de $H_f(0,1/3,0)$ vaut $24>0$ et sa trace vaut $-12<0$. Ainsi, au moins une de ses valeurs propres est strictement négative, et donc deux le sont d'après le signe du déterminant. Il s'agit donc bien d'un point selle.

Exercice 3. Etude d'une fonction à n variables
Soit $\Omega=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n:\forall 1\leq i\leq n, x_i>0\}$, $\alpha\in]0,+\infty[$ et $f_\alpha:\Omega\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\quad f_\alpha(x)=x_1x_2...x_n+\alpha^{n+1}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\right)$$

1. Montrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que f_α admet un unique point critique.
3. Déterminer la nature de ce point critique.
Indication : En notant H la hessienne de la fonction au point critique (ou un multiple de celle-ci), trouver λ réel tel que $\mathrm{rg}(H-\lambda I_n)=1$ puis conclure en utilisant la trace de H.

Correction.

1. Puisque $\Omega=]0,+\infty[^n$ et que $]0,+\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ comme produit cartésien d'ouverts.
2. Comme f_α est de classe C^2 sur Ω comme somme et produit de fonctions de classe C^2 dont les dénominateurs ne s'annulent pas, calculons le gradient de f_α en tout point $x=(x_1,...,x_n)\in\Omega$:

$$\forall i\in\{1,...,n\},\quad \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}(x)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}x_j-\frac{\alpha^{n+1}}{x_i^2}$$

On a donc, pour tout $x\in\Omega$, comme $x_i>0$ pour tout $i\in\{1,...,n\}$,

$$\nabla_x f_\alpha=0\iff\forall i\in\{1,...,n\},\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}x_j-\frac{\alpha^{n+1}}{x_i^2}=0\iff\forall i\in\{1,...,n\},x_i^2=\frac{\alpha^{n+1}}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}x_j}.$$

En faisant le produit des n égalités, on obtient

$$\prod_{i=1}^{n}x_i^2=\prod_{i=1}^{n}\frac{\alpha^{n+1}}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}x_j}=\frac{\alpha^{n(n+1)}}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}x_j}=\frac{\alpha^{n(n+1)}}{\prod_{i=1}^{n}x_i^{n-1}}=\frac{\alpha^{n(n+1)}}{\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{n-1}}$$

et donc, comme $\prod_{i=1}^{n}x_i^2=\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^2$, on a

$$\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{n+1}=\alpha^{n(n+1)},$$

d'où $\prod_{i=1}^{n}x_i=\alpha^n$ et donc, pour tout $i\in\{1,...,n\}$, $\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}x_i=\frac{\alpha^n}{x_i}$ puisque $x_i>0$. On obtient finalement, pour tout $i\in\{1,...,n\}$,

$$x_i^2=\frac{\alpha^{n+1}}{\frac{\alpha^n}{x_i}}$$

ce qui donne $x_i=\alpha$. On a donc montré que $(\alpha,...,\alpha)$ est l'unique point critique de f_α sur Ω.

3. Comme f_α est de classe C^2, calculons ses dérivées partielles secondes en tout point $x \in \Omega$:

$$\forall (i,j) \in \{1,...,n\}^2, i \neq j, \quad \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x_i^2}(x) = \frac{2\alpha^{n+1}}{x_i^3}, \quad \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \notin \{i,j\}}}^{n} x_k = \frac{\alpha^n}{x_i x_j}.$$

Au point critique $(\alpha, ..., \alpha)$, on obtient

$$\forall (i,j) \in \{1,...,n\}^2, i \neq j, \quad \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x_i^2}(\alpha,...,\alpha) = 2\alpha^{n-2}, \quad \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x_j \partial x_i}(\alpha,...,\alpha) = \alpha^{n-2},$$

et la hessienne de f_α en $(\alpha, ..., \alpha)$ est donc $\alpha^{n-2}H$ avec H la matrice $n \times n$ de diagonale 2 avec des 1 partout ailleurs. On sait que H est symétrique, donc diagonalisable avec des valeurs propres réelles. On remarque que $\text{rg}(H - I_n) = 1$, ce qui veut dire que 1 est valeur propre de H d'ordre $n-1$, puisque, d'après le théorème du rang, la dimension de $\text{Ker}(H - I_n)$ est $n-1$, c'est-à-dire que le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension $n-1$. Soit $\mu \in \mathbb{R}$ la valeur propre manquante, alors on a, par invariance de la trace qui vaut la somme des valeurs propres de H,

$$\text{Tr}(H) = 2n = (n-1) + \mu$$

ce qui donne $\mu = n+1 > 0$, donc H a toutes ses valeurs propres strictement positives, donc H est définie positive, ce qui montre que f_α admet un minimum local en $(\alpha, ..., \alpha)$.

Exercice 4. Extrema sur un domaine

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ et $K = [0,1]^2$.

1. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur K.
2. Etudier les extrema de f sur son bord $K \backslash]0,1[^2$.
3. Etudier les extrema de f sur $]0,1[^2$.
4. Déduire des questions précédentes les points où f admet son minimum et son maximum sur K.

Correction.

1. f est une fonction continue, car polynomiale et K est un compact car $[0,1]$ est compact (fermé borné dans $\mathbb{R}$), donc d'après le théorème de Weierstrass, f admet un minimum et un maximum sur K.
2. Le carré $K \backslash]0,1[^2$ peut être écrit $D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ où les quatre côtés de ce carrés sont donnés par

$$D_1 := \{(x,0) : x \in [0,1]\}$$
$$D_2 := \{(x,1) : x \in [0,1]\}$$
$$D_3 := \{(0,y) : y \in [0,1]\}$$
$$D_3 := \{(1,y) : y \in [0,1]\}.$$

   Ainsi, on a
   - Sur D_1 et D_3, $\forall x \in [0,1]$, $\forall y \in [0,1]$, $f(x,0) = f(0,y) = 0$.
   - Sur D_2, $\forall x \in [0,1]$, $f(x,1) = -x^3$ admet son maximum 0 pour $x = 0$, c'est-à-dire au point $(0,1)$ et son minimum -1 pour $x = 1$, c'est-à-dire au point $(1,1)$.
   - Sur D_4, $\forall y \in [0,1]$, $f(1,y) = -y^3$ admet son maximum 0 pour $y = 0$, c'est-à-dire au point $(1,0)$ et son minimum -1 pour $y = 1$, c'est-à-dire au point $(1,1)$.

   Ainsi, sur $K \backslash]0,1[^2$,
   - f admet pour maximum 0 atteint en tout point de D_1, D_3 ;
   - f admet pour minimum -1 atteint au point $(1,1)$.
3. Sur l'ouvert $]0,1[^2$, calculons les dérivées partielles de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(1 - x^2 - y^2) + xy(-2x) = y(1 - 3x^2 - y^2) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(1 - 3y^2 - x^2),$$

et le système donnant les points critiques est

$$\nabla_{(x,y)} f = 0 \iff y(1-3x^2-y^2) = x(1-3y^2-x^2) = 0.$$

On obtient que ($y = 0$ ou $y^2 = 1-3x^2$) et ($x = 0$ ou $1-3y^2-x^2 = 0$).
Si $y = 0$, alors $1-3y^2-x^2 = 1-x^2 = 0$ et donc $x \in \{-1,1\}$.
Si $x = 0$, alors $1-3x^2-y^2 = 1-y^2 = 0$ et donc $y \in \{-1,1\}$
Si $y^2 = 1-3x^2$, alors $1-3y^2-x^2 = 1-3(1-3x^2)-x^2 = 8x^2-2 = 0$, et donc $x \in \{-1/2, 1/2\}$, ce qui donne $1-3x^2 = 1-3/4 = 1/4$ et ainsi $y \in \{-1/2, 1/2\}$. Ainsi, l'unique point critique appartenant à $]0,1[^2$ est $(1/2, 1/2)$.
Les dérivées secondes de f sur $]0,1[^2$ sont données par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -6xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1-3y^2-3x^2,$$

et la hessienne de f au point $(1/2, 1/2)$ est donc

$$H_f(1/2,1/2) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

de polynôme caractéristique

$$P(X) = \det(XI_3 - H_f(1/2,1/2)) = \det\begin{pmatrix} X+\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & X+\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \left(X+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = (X+2)(X+1),$$

et donc les valeurs propres sont -1 et -2, ce qui veut dire que f admet un maximum au point $(1/2, 1/2)$ qui vaut $f(1/2,1/2) = 1/8$.
Alternativement, le déterminant de cette hessienne vaut $2 > 0$, donc ses valeurs propres sont de même signe. Comme sa trace vaut $-3 < 0$, on en déduit que ses valeurs propres sont toutes les deux strictement négatives, donc que f admet un maximum local en $(1/2, 1/2)$.

4. On en déduit que f atteint son maximum $1/8$ sur K au point $(1/2, 1/2)$ et son minimum -1 au point $(1,1)$.

Exercice 5. La méthode des moindres carrés

Une chercheuse a quelques raisons de croire que deux grandeurs x et y sont liées par une fonction affine f, c'est-à-dire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $y = f(x) = ax+b$. Elle met donc au point une expérience permettant de récolter des données sur la forme de points $\{(x_k,y_k)\}_{k=0}^n$, où $(x_k)_k$ est une suite strictement croissante. En général, ces données sont affectées par des erreurs de mesure. Lorsqu'elle en fait une représentation graphique, elle cherche f pour qu'elle s'ajuste le mieux possible aux points observés. Pour tout $k \in \{0,...,n\}$, on noter $d_k = y_k - f(x_k)$ l'écart vertical du point (x_k, y_k) par rapport à la fonction f au point abscisse x_k. La méthode des moindres carrés est celle qui choisit f (c'est-à-dire a et b ici) de telle sorte que la somme des carrés des déviations verticales soit minimale. On notera $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a,b) \mapsto \sum_{k=0}^{n} d_k^2$.

1. Déterminer $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \varepsilon \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad E(a,b) = \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma ab + \delta a + \mu b + \varepsilon.$$

2. Montrer que $(n+1)\sum_{k=0}^{n} x_k^2 > \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)^2$.
3. Montrer que E admet un unique point critique (a_0, b_0) dont on donnera l'expression en fonction de $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu)$.

4. Montrer que

$$a_0 = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(x_k - \overline{X})(y_k - \overline{Y})}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(x_k - \overline{X})^2}, \quad b_0 = \overline{Y} - a_0\overline{X} \quad \text{avec} \quad \overline{X} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k, \quad \overline{Y} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} y_k,$$

c'est-à-dire où $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont les valeurs moyennes de $X = \{x_k\}_{k=0}^n$ et $Y = \{y_k\}_{k=0}^n$.
Vocabulaire statistique : on a en fait $a_0 = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{Var}(X)}$ *où* $\text{cov}(X,Y)$ *est appelée covariance de* X *et* Y*, et* $\text{Var}(X)$ *la variance de* X*.*

5. Montrer que E admet un minimum global en (a_0, b_0).

La droite d'équation $y = a_0x + b_0$ s'appelle la droite de régression de Y par rapport à X.

Correction.

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\begin{aligned} E(a,b) := \sum_{k=0}^{n} d_k^2 &= \sum_{k=0}^{n}(y_k - ax_k - b)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(y_k^2 + a^2x_k^2 + b^2 - 2ax_ky_k - 2by_k + 2abx_k\right) \\ &= a^2\left(\sum_{k=0}^{n} x_k^2\right) + b^2(n+1) + ab\left(2\sum_{k=0}^{n} x_k\right) + a\left(-2\sum_{k=0}^{n} x_ky_k\right) + b\left(-2\sum_{k=0}^{n} y_k\right) + \sum_{k=0}^{n} y_k^2, \end{aligned}$$

d'où les valeurs des paramètres recherchés.

2. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^{n+1}$ aux vecteurs $(1, ..., 1)$ et $(x_0, ..., x_n)$ et on trouve

$$\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=0}^{n} 1^2\right)\left(\sum_{k=0}^{n} x_k^2\right) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} x_k^2.$$

Comme l'égalité a lieu si et seulement si les vecteurs considérés sont liés, c'est-à-dire si et seulement si $(x_0, ..., x_n) = (\lambda, ..., \lambda)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, cette égalité est impossible car la suite $(x_k)_{k=0}^n$ est strictement croissante, donc ses éléments sont non-égaux. On en déduit donc que

$$\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)^2 < (n+1)\sum_{k=0}^{n} x_k^2.$$

3. Déterminons les points critiques de E. On a, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla_{(a,b)}E = 0 \iff \begin{cases} 2\alpha a + \gamma b + \delta = 0 \\ \gamma a + 2\beta b + \mu = 0. \end{cases}$$

On remarque que $\alpha = \sum_{k=0}^n x_k^2 \neq 0$ puisque la suite $(x_k)_{k=0}^n$ est strictement croissante. La première équation nous donne donc

$$a = \frac{-\delta - \gamma b}{2\alpha},$$

ce qui permet de trouver, en remplaçant dans la deuxième équation

$$\gamma\left(\frac{-\delta - \gamma b}{2\alpha}\right) + 2\beta b + \mu = 0 \iff b\left(2\beta - \frac{\gamma^2}{2\alpha}\right) = \frac{\delta\gamma}{2\alpha} - \mu.$$

On remarque maintenant que

$$2\beta - \frac{\gamma^2}{2\alpha} = 2(n+1) - \frac{\left(2\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k\right)^2}{2\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k^2} = 2\left(n+1 - \frac{\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k^2\right)^2}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k^2}\right) > 0$$

d'après la question précédente, d'où

$$b = \frac{\frac{\delta\gamma}{2\alpha} - \mu}{2\beta - \frac{\gamma^2}{2\alpha}} = \frac{\delta\gamma - 2\mu\alpha}{4\alpha\beta - \gamma^2},$$

ce qui permet de trouver, comme $\alpha \neq 0$,

$$a = \frac{-\delta - \gamma b}{2\alpha} = \frac{-\delta - \gamma\frac{\delta\gamma - 2\mu\alpha}{4\alpha\beta - \gamma^2}}{2\alpha} = \frac{\mu\gamma - 2\beta\delta}{4\alpha\beta - \gamma^2}.$$

Ainsi, E admet comme unique point critique le point

$$(a_0, b_0) = \left(\frac{\mu\gamma - 2\beta\delta}{4\alpha\beta - \gamma^2}, \frac{\delta\gamma - 2\mu\alpha}{4\alpha\beta - \gamma^2}\right)$$

4. Reste à vérifier que a_0 et b_0 sont bien égales aux valeurs données par l'énoncé. On calcule

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \sum_{k=0}^{n}(x_k - \overline{X})^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(x_k^2 + \overline{X}^2 - 2x_k\overline{X}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} x_k^2 + (n+1)\overline{X}^2 - 2\overline{X}\sum_{k=0}^{n} x_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} x_k^2 + (n+1) \times \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)^2}{(n+1)^2} - \frac{2\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} x_k^2 - \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)^2}{n+1} \\
&= \frac{(n+1)\sum_{k=0}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)^2}{n+1} \\
&= \frac{4\alpha\beta - \gamma^2}{4(n+1)}.
\end{aligned}$$

De même, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \sum_{k=0}^{n}(x_k - \overline{X})(y_k - \overline{Y}) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(x_k y_k - \overline{Y}x_k - \overline{X}y_k + \overline{XY}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} x_k y_k - \overline{Y}\sum_{k=0}^{n} x_k - \overline{X}\sum_{k=0}^{n} y_k + (n+1)\overline{XY} \\
&= \sum_{k=0}^{n} x_k y_k - \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)}{n+1} - \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)}{n+1} + \frac{(n+1)}{(n+1)^2}\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} x_k y_k - \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)}{n+1} \\
&= \frac{(n+1)\sum_{k=0}^{n} x_k y_k - \left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)}{n+1} \\
&= \frac{\mu\gamma - 2\beta\delta}{4(n+1)},
\end{aligned}$$

d'où la valeur de a_0. On vérifie facilement que $b_0 = \overline{Y} - a_0\overline{X}$.

5. On trouve facilement que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial a^2}(a,b) = 2\alpha, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial b^2}(a,b) = 2\beta, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial a \partial b}(a,b) = \frac{\partial^2 E}{\partial b \partial a}(a,b) = \gamma.$$

Le déterminant de la hessienne au point (a_0, b_0) est donc $4\alpha\beta - \gamma^2 > 0$ comme on l'a vu précédemment (cela découle du fait que $2\beta - \frac{\gamma^2}{2\alpha} > 0$), et puisque le premier mineur principal est $2\alpha > 0$, on en déduit donc que cette hessienne est définie positive par le critère de Sylvester, donc E admet un minimum local en (a_0, b_0).
Reste à montrer que $\lim\limits_{\|(a,b)\|_2 \to 0} E(a,b) = +\infty$ pour conclure que (a_0, b_0) est l'unique minimum global de E. On considère la forme quadratique $\Phi(a,b) = \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma ab$. Comme $\alpha > 0$ et que son déterminant vaut $\alpha\beta - \frac{\gamma^2}{4} > 0$ par le même argument que précédemment, alors Φ est définie positive et donc admet deux valeurs propres $\lambda_m < \lambda_M$ strictement positives. On sait qu'alors

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda_m \|(a,b)\|_2^2 \leq \Phi(a,b) \leq \lambda_M \|(a,b)\|_2^2$$

ce qui permet de conclure que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \lambda_m \|(a,b)\|_2^2 + \delta a + \mu b \leq E(a,b) - \varepsilon \leq \lambda_M \|(a,b)\|_2^2 + \delta a + \mu b,$$

et comme $\delta a + \mu b = o(\|(a,b)\|_2^2)$, on en déduit que $\lim\limits_{\|(a,b)\|_2 \to 0} E(a,b) = +\infty$ et donc que (a_0, b_0) est l'unique minimum de E sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6. Principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, $\Delta f = \partial_{xx}^2 f + \partial_{yy}^2 f$ sont laplacien et D une boule ouverte de $\mathbb{R}^2$. On suppose que f est sous-harmonique, c'est-à-dire que $\Delta f \geq 0$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $x_0 \in \partial D = \overline{D} \backslash D$ tel que

$$\sup_{x \in \overline{D}} f(x) \leq f(x_0).$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $g_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad g_p(x) = f(x) + \frac{\|x\|_2^2}{p}.$$

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $x_p \in \overline{D}$ tel que

$$\sup_{x \in \overline{D}} g_p(x) = g_p(x_p).$$

2. On suppose que $x_p \in D$. Démontrer que l'on a

$$\frac{\partial^2 g_p}{\partial x^2}(x_p) \leq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g_p}{\partial y^2}(x_p) \leq 0.$$

3. En déduire que $x_p \in \partial D$.
Indication : on pourra calculer le laplacien de g_p en tout point et trouver une contradiction avec la question précédente.
4. Montrer que $\sup\limits_{x \in \overline{D}} f(x) \leq \sup\limits_{y \in \partial D} f(y)$.
Indication : on pourra commencer par chercher à montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \overline{D}$, $f(x) \leq \sup\limits_{y \in \partial D} f(y) + \dfrac{M}{p}$.
5. Conclure.

Correction.

1. On sait que $\overline{D}$ est un compact, en tant que fermé-borné de $\mathbb{R}^2$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, alors g_p est continue comme somme de fonctions continues, donc d'après le théorème des bornes atteintes de Weierstrass, g_p atteint ses bornes sur $\overline{D}$, en particulier son maximum en un point $x_p \in \overline{D}$.
2. On note $x_p = (x_{p,1}, x_{p,2}) \in \overline{D}$. Si $x_p \in D$, alors la fonction g_p atteint un maximum local en x_p et donc en particulier il s'agit d'un point critique de g_p, d'où $\nabla_{x_p} g_p = (0,0)$. Ainsi, $t = x_{2,p}$ est un maximum local de $\alpha : t \mapsto g_p(x_{1,p}, t)$ et $t = x_{1,p}$ est un maximum local de $\beta : t \mapsto g_p(t, x_{2,p})$. On en déduit que les dérivées secondes de ces fonctions en ces points sont négatives ou nulle, ce qui permet de conclure que
$$\alpha''(x_{2,p}) = \frac{\partial^2 g_p}{\partial x^2}(x_p) \leq 0, \quad \text{et} \quad \beta''(x_{1,p}) = \frac{\partial^2 g_p}{\partial y^2}(x_p) \leq 0.$$
3. La question précédente implique que
$$\Delta g_p(x_p) = \frac{\partial^2 g_p}{\partial x^2}(x_p) + \frac{\partial^2 g_p}{\partial y^2}(x_p) \leq 0.$$
Calculons le laplacien de g_p. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a, puisque $\Delta f \geq 0$,
$$\Delta g_p(x,y) = \Delta f(x) + \frac{4}{p} > 0,$$
ce qui est impossible. On en déduit donc que $x_p \in \partial D$.
4. Soit $x \in \overline{D}$, alors
$$f(x) \leq g_p(x) \leq g_p(x_p) \leq f(x_p) + \frac{M}{p} \leq \sup_{y \in \partial D} f(y) + \frac{M}{p},$$
où $M > 0$ est tel que $\forall x \in D$, $\|x\|_2 \leq M$. On passe à la limite quand $p \to +\infty$ et on obtient donc que
$$\forall x \in \overline{D}, \quad f(x) \leq \sup_{y \in \partial D} f(y),$$
d'où le résultat en prenant le supremum sur $x \in \overline{D}$.
5. Comme ∂D est compact en tant que fermé (par définition) et borné (puisque D est borné), f atteint ses bornes sur ∂D, en particulier il existe $x_0 \in \partial D$ tel que $\sup_{y \in \partial D} f(y) = f(x_0)$, d'où, d'après la question précédente,
$$\exists x_0 \in \partial D, \quad \sup_{x \in \overline{D}} f(x) \leq f(x_0),$$
ce qui est exactement le résultat que l'on cherchait.

Exercice supplémentaire (application directe, en autonomie)

Exercice 7. Extrema sur un domaine II

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = y^2 - yx^2 + x^2$ et $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \le y \le 1 - x^2\}$.

1. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur K.
2. Déterminer le ou les point(s) critique(s) de f sur l'intérieur de K donné par $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 < y < 1 - x^2\}$.
3. Etudier les extrema de f sur K.

Correction.

1. f est polynômiale, donc continue. De plus, montrons que K est un compact de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire un fermé-borné d'après le théorème de Heine-Borel. Ainsi, d'après le théorème des bornes atteintes de Weierstrass, f atteindra ses bornes sur K et aura donc un minimum et un maximum.
   K est fermé. En effet, soit $\{(x_k, y_k)\}_k \subset K$ qui converge vers $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $x_k^2 - 1 \le y_k \le 1 - x_k^2$ et, en passant à la limite, on obtient que $x^2 - 1 \le y \le 1 - x^2$ et donc que $(x,y) \in K$.
   K est borné. Soit $(x,y) \in K$, alors on a $x^2 - 1 \le y \le 1 - x^2$, ce qui implique que $-1 \le x^2 - 1 \le y \le 1 - x^2 \le 1$ car $x^2 \ge 0$, et donc $|y| \le 1$. De plus, on a $x^2 - 1 \le 1 - x^2$ et ainsi $2x^2 \le 2$ ce qui donne $|x| \le 1$. Ainsi, K est borné.
2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors
   $$\nabla_{(x,y)} f = 0 \iff (2x - 2xy, 2y - x^2) = (0,0) \iff 2x(1-y) = 0 \text{ et } x^2 = 2y \iff (x = 0 \text{ ou } y = 1) \text{ et } x^2 = 2y.$$
   Si $x = 0$, alors $2y = 0$ donc $y = 0$ et donc $(0,0)$ est un point critique de f. Si $y = 1$ alors l'équation $x^2 = 2$ donne $x \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ et donc $(-\sqrt{2}, 1)$ et $(\sqrt{2}, 1)$ sont aussi points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.
   On remarque que :
   • $(0,0)$ appartient à l'intérieur de K car $0^1 - 1 = -1 \le 0 \le 1 - 0^2 = 1$,
   • $(-\sqrt{2}, 1)$ n'appartient pas à l'intérieur de K car $(-\sqrt{2})^2 - 1 = 1$,
   • de même, $(\sqrt{2}, 1)$ n'appartient pas à l'intérieur de K.
   Ainsi, $(0,0)$ est l'unique point critique de f dans l'intérieur de K.
3. Déterminons la hessienne de f au point $(0,0)$. Cette fonction est polynômiale, donc deux fois différentiable. On calcule, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 - 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2x.$$
   Ainsi, on a
   $$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$
   qui est déjà diagonale, donc $2 > 0$ est son unique valeur propre, ce qui veut dire que $H_f(0,0)$ est définie positive et que $(0,0)$ est un minimum local de f sur K. De plus, $f(0,0) = 0$.
   Etudions maintenant f sur le bord de K, c'est-à-dire sur les morceaux de paraboles $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 1\}$ et $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 - x^2\}$.
   Pour tout $(x,y) \in C_1$, on a
   $$\forall x \in [-1,1], \quad f(x,y) = f(x, x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 - (x^2 - 1)x^2 + x^2 = 1.$$
   Pour tout $(x,y) \in C_2$, on a
   $$\forall x \in [-1,1], \quad f(x,y) = f(x, 1 - x^2) = (1 - x^2)^2 - (1 - x^2)x^2 + x^2 = 2x^4 - 2x^2 + 1.$$
   La fonction $x \mapsto 2x^4 - 2x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $g'(x) = 8x^3 - 4x = 4x(2x^2 - 1)$ qui s'annule pour $x = 0$ et $x \in \{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\}$. On peut aisément faire le tableau de variations de g et on trouve que g atteint sur $[-1,1]$ son maximum, qui vaut 1 en -1, 0 et 1 et son minimum, qui vaut $1/2$ en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.
   On en déduit donc que le maximum de f sur K est 1, atteint sur C_1 et au point $(0,1)$. De plus, le minimum de f est atteint en $(0,0)$ et vaut 0.