Feuille 6 : Extrema

Objectifs	OUI	NON
Déterminer les points critiques d'une application		
Etudier la nature d'un point critique en étudiant la hessienne		
Déterminer d'autres extrema éventuels au bord d'un domaine		

Exercice 1. Preuve fausse à corriger
Déterminer toutes les erreurs commises dans la preuve ci-dessous et la corriger.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x, y) = x^4 + y^4$. *Montrons que* f *admet au point* $(1, 2)$ *un minimum local. En effet, on trouve facilement que, pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$. *Ainsi, la Hessienne de* f *au point* $(1, 2)$ *est diagonale avec des coefficients strictement positifs, donc définie positive. On en déduit que* f *admet au point* $(1, 2)$ *un minimum local.*

Exercice 2. Extrema de polynômes
Déterminer les extrema des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x + y)^2$
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto 1 + 2y - 3y^2 + 2xz - 3z^2$

Exercice 3. Etude d'une fonction à n variables
Soit $\Omega = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \forall 1 \leq i \leq n, x_i > 0\}$, $\alpha \in]0, +\infty[$ et $f_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f_\alpha(x) = x_1 x_2 ... x_n + \alpha^{n+1} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} \right)$$

1. Montrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que f_α admet un unique point critique.
3. Déterminer la nature de ce point critique.
   Indication : En notant H *la hessienne de la fonction au point critique (ou un multiple de celle-ci), trouver* λ *réel tel que* $\mathrm{rg}(H - \lambda I_n) = 1$ *puis conclure en utilisant la trace de* H.

Exercice 4. Extrema sur un domaine
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ et $K = [0, 1]^2$.

1. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur K.
2. Etudier les extrema de f sur son bord $K \backslash]0, 1[^2$.
3. Etudier les extrema de f sur $]0, 1[^2$.
4. Déduire des questions précédentes les points où f admet son minimum et son maximum sur K.

Exercice 5. La méthode des moindres carrés
Une chercheuse a quelques raisons de croire que deux grandeurs x et y sont liées par une fonction affine f, c'est-à-dire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $y = f(x) = ax + b$. Elle met donc au point une expérience permettant de récolter des données sur la forme de points $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^n$, où $(x_k)_k$ est une suite strictement croissante. En général, ces données sont affectées par des erreurs de mesure. Lorsqu'elle en fait une représentation graphique, elle cherche f pour qu'elle s'ajuste le mieux possible aux points observés. Pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, on noter $d_k = y_k - f(x_k)$ l'écart vertical du point (x_k, y_k) par rapport à la fonction f au point abscisse x_k. La méthode des moindres carrés est celle qui choisit f (c'est-à-dire a et b ici) de telle sorte que la somme des carrés des déviations verticales soit minimale. On notera $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^n d_k^2$.

1. Déterminer $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad E(a, b) = \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma ab + \delta a + \mu b.$$
2. Montrer que $(n + 1) \displaystyle\sum_{k=0}^n x_k^2 > \left(\sum_{k=0}^n x_k \right)^2$.
3. Montrer que E admet un unique point critique (a_0, b_0) dont on donnera l'expression en fonction de $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu)$.
4. Montrer que
$$a_0 = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^n (x_k - \overline{X})(y_k - \overline{Y})}{\displaystyle\sum_{k=0}^n (x_k - \overline{X})^2}, \quad b_0 = \overline{Y} - a_0 \overline{X} \quad \text{avec} \quad \overline{X} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k, \quad \overline{Y} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n y_k,$$
c'est-à-dire où $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont les valeurs moyennes de $X = \{x_k\}_{k=0}^n$ et $Y = \{y_k\}_{k=0}^n$.
Vocabulaire statistique : on a en fait $a_0 = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{Var}(X)}$ *où* $\operatorname{cov}(X, Y)$ *est appelée covariance de* X *et* Y*, et* $\operatorname{Var}(X)$ *la variance de* X.
5. Montrer que E admet un minimum global en (a_0, b_0).

La droite d'équation $y = a_0 x + b_0$ s'appelle la droite de régression de Y par rapport à X.

Exercice 6. Principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, $\Delta f = \partial^2_{xx} f + \partial^2_{yy} f$ son laplacien et D une boule ouverte de $\mathbb{R}^2$. On suppose que f est sous-harmonique, c'est-à-dire que $\Delta f \geq 0$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $x_0 \in \partial D = \overline{D} \backslash D$ tel que
$$\sup_{x \in \overline{D}} f(x) \leq f(x_0).$$
Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $g_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad g_p(x) = f(x) + \frac{\|x\|_2^2}{p}.$$

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $x_p \in \overline{D}$ tel que
$$\sup_{x \in \overline{D}} g_p(x) = g_p(x_p).$$
2. On suppose que $x_p \in D$. Démontrer que l'on a
$$\frac{\partial^2 g_p}{\partial x^2}(x_p) \leq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g_p}{\partial y^2}(x_p) \leq 0.$$

3. En déduire que $x_p \in \partial D$.
   Indication : on pourra calculer le laplacien de g_p en tout point et trouver une contradiction avec la question précédente.
4. Montrer que $\sup\limits_{x \in \overline{D}} f(x) \leq \sup\limits_{y \in \partial D} f(y)$.
   Indication : on pourra commencer par chercher à montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \overline{D}$, $f(x) \leq \sup\limits_{y \in \partial D} f(y) - \dfrac{M}{p}$.
5. Conclure.

Exercice supplémentaire (application directe, en autonomie)

Exercice 7. Extrema sur un domaine II
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = y^2 - yx^2 + x^2$ et $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

1. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur K.
2. Déterminer le ou les point(s) critique(s) de f sur l'intérieur de K donné par $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 < y < 1 - x^2\}$.
3. Etudier les extrema de f sur K.