Feuille 5 : Différentielle d'ordre k et fonctions de classe C^k
CORRECTION

Exercice 1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\alpha < 2$.
2. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer toutes les valeurs de α pour lesquelles f est différentiable en $(0,0)$.
4. Déterminer toutes les valeurs de α pour lesquelles f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Correction.

1. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ comme quotient (si $\alpha > 0$ ou produit (si $\alpha \leq 0$) de fonctions continues. Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a
$$|f(x,y)| = \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^\alpha} \leq \frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^\alpha} = (x^2+y^2)^{2-\alpha}.$$
Si $2-\alpha > 0$, c'est-à-dire $\alpha < 2$, alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{2-\alpha} = 0$ et donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, ce qui veut dire que f est continue en $(0,0)$, donc sur $\mathbb{R}^2$.
Si $\alpha \geq 2$, alors pour tout $x \neq 0$, on calcule
$$f(x,x) = \frac{x^4}{(2x^2)^\alpha} = \frac{x^{4-2\alpha}}{2^\alpha}$$
qui ne tend pas vers 0 quand $x \to 0$. En effet, $4-2\alpha \leq 0$ et donc :
   - soit $4-2\alpha = 0$, c'est-à-dire $\alpha = 2$, et $f(x,x) = \frac{1}{4} \neq 0$,
   - soit $4-2\alpha < 0$, c'est-à-dire $\alpha > 2$, et $f(x,x) \to +\infty$ quand $x \to 0$ car $4-2\alpha = 2(2-\alpha)$.

   Dans ce cas, on en déduit que f n'est pas continue en $(0,0)$.
2. Il est clair que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions différentiables. Ainsi, f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
Montrons que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$. Il suffit de calculer, pour tout $h \neq 0$ et $k \neq 0$,
$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0, \quad \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$$
qui tendent tous les deux vers 0 quand h et k tendent vers 0. Ainsi, f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ qui valent 0.
3. Si f est différentiable en $(0,0)$ alors sa différentielle est nulle. Pour $(h,k) \neq (0,0)$, on calcule
$$\frac{|f(h,k)|}{\|(h,k)\|_2} = \frac{h^2k^2}{(h^2+k^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}},$$
et ce quotient tend vers 0 si et seulement si $\alpha + \frac{1}{2} < 2$ (mêmes arguments qu'à la question 1.), c'est-à-dire $\alpha < \frac{3}{2}$. On en déduit que f est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha < \frac{3}{2}$.

4. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions de classe C^1. Si f est de classe C^1 en $(0,0)$, alors nécessairement f est différentiable et $\alpha > \frac{3}{2}$. On calcule, pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2(x^2+y^2-\alpha x^2)}{(x^2+y^2)^{\alpha+1}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2yx^2(x^2+y^2-\alpha y^2)}{(x^2+y^2)^{\alpha+1}},$$

puis on majore de la façon suivante

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| &\leq \frac{2|x|y^2(x^2+y^2+|\alpha|x^2)}{(x^2+y^2)^{\alpha+1}} \\
&\leq \frac{2\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)(x^2+y^2+|\alpha|(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^{\alpha+1}} \\
&\leq \frac{2(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}(1+|\alpha|)}{(x^2+y^2)^{\alpha+1}} \\
&\leq 2(1+|\alpha|)(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}-\alpha}.
\end{aligned}$$

Par symétrie des variables x et y, on trouve aussi

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq 2(1+|\alpha|)(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}-\alpha}.$$

Ainsi, si $\frac{3}{2}-\alpha > 0$, c'est-à-dire $\alpha < \frac{3}{2}$, on a que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2(1+|\alpha|)(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}-\alpha} = 0$ et ainsi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0),$$

et donc les dérivées premières de f sont continues et ainsi f est de classe C^1 en $(0,0)$, et donc sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Preuve fausse à corriger
Déterminer toutes les erreurs commises dans la preuve ci-dessous et la corriger.
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & \textit{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrons que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.
En effet, les dérivées partielles premières de f *en* $(0,0)$ *se calculent comme suit :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0.$$

De plus, comme f *est différentiable sur* $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, *on a, pour tout* $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{yx^2(x^2+3y^2)}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

et donc, pour tout $h \neq 0$ *et pour tout* $k \neq 0$, *on a*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,k) = 0,$$

et donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = 0 = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

On en déduit que f *est deux fois différentiable au point* $(0,0)$.
Correction. Les erreurs (et leurs corrections) dans le raisonnement précédent sont les suivantes :

1. Les formules donnant les dérivées partielles premières de f en $(0,0)$ sont fausses/inversées (bien que cela ne change rien au résultat final) :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0.$$
2. Les dérivées partielles en tout point $(x,y) \neq (0,0)$ sont fausses (les dénominateurs sont évidemment faux !) :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{yx^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$
3. Pour tout $h \neq 0$ et tout $k \neq 0$, on a (la deuxième valeurt était fausse dans la preuve)
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(h,0) = h.$$
4. Le calcul de $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ est donc juste, alors que
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$
5. On obtient donc que
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0),$$
et donc, d'après le théorème de Schwarz, f n'est pas deux fois différentiable au voisinage de $(0,0)$.
6. Au passage, montrer l'égalité de ces dérivées croisées ne permet PAS de conclure que f est deux fois différentiable au point considéré !

Exercice 3. Egalité des dérivées partielles croisées
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et sont égales.
2. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ne sont pas continues en $(0,0)$.

Correction.

1. Tout d'abord, il est clair que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions de classe C^2 dont le dénominateur ne s'annule pas. On a, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y^3(2x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$
Reste à calculer, pour $h \neq 0$ et $k \neq 0$,
$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0, \quad \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \frac{k^2}{k} = k$$
qui tendent tous les deux vers 0 quand $h \to 0$ et $k \to 0$. On a donc montré que
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$
Calculons, pour $h \neq 0$ et $k \neq 0$,
$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k} = 0, \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = 0$$
qui tendent tous les deux vers 0 quand $h \to 0$ et $k \to 0$. On en déduit que
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0.$$

2. Calculons, pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -\frac{8x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

et on a donc, pour $x \neq 0$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,x) = \frac{-8x^6}{(2x^2)^3} = -1$$

qui ne tend pas vers 0 quand $x \to 0$. On en déduit donc que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ne sont pas continues en $(0,0)$.

Exercice 4. Formules de Taylor-Young – Applications du cours
Ecrire la formule de Taylor-Young :

1. à l'ordre deux pour une fonction de trois variables ;
2. à l'ordre trois pour une fonction de deux variables ;
3. à l'ordre treize en $(0,0)$ pour $f(x,y) = y^5 + x^3y - x^2 + y$.

Correction.

1. Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ avec Ω ouvert. Pour tout (h,k,ℓ) et pour tout $(x_0,y_0,z_0) \in \Omega$ où f est deux fois différentiable, tels que $(x_0+h, y_0+k, z_0+\ell) \in \Omega$, alors on a, quand $(h,k,\ell) \to (0,0,0)$,

$$\begin{aligned}
&f(x_0+h, y_0+k, z_0+\ell)\\
&= f(x_0,y_0,z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)k + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\ell\\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0,z_0)h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0,z_0)k^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0,y_0,z_0)\ell^2\right)\\
&\quad\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0,z_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x_0,y_0,z_0)h\ell + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x_0,y_0,z_0)k\ell + o(h^2+k^2+\ell^2).
\end{aligned}$$

2. Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec Ω ouvert. Pour tout (h,k) et pour tout $(x_0,y_0) \in \Omega$ où f est deux fois différentiable, tels que $(x_0+h, y_0+k) \in \Omega$, alors on a, quand $(h,k) \to (0,0,0)$,

$$\begin{aligned}
&f(x_0+h, y_0+k)\\
&= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k\\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)k^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)hk\right)\\
&\quad\quad + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,y_0)h^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0,y_0)k^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0,y_0)h^2k + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x_0,y_0)hk^2\right)\\
&+ o(\|(h,k)\|_2^3).
\end{aligned}$$

3. Il est clair que, comme toutes les dérivées partielles de f, qui est un polynôme de degré 5, d'ordre 6 et plus s'annulent, on a, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$

$$f(0+h, 0+k) = f(h,k) = k^5 + h^3k - h^2 + k.$$

Ce polynôme est l'exacte approximation de lui-même au voisinage de $(0,0)$.

Exercice 5. Formules de Taylor-Young – Calculs
Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions suivantes :

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^2 + 3\cos(xy)$;
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = e^{xy} + (x+y)^3$;

- $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = \arctan(x^2+y)$.

Puis déterminer les formules de Taylor-Young à l'ordre 2 en $(0,0)$ pour f, en $(1,0)$ pour g et en $(0,0)$ pour h.

Correction. Les fonctions données dans cet exercices sont deux fois différentiables comme sommes et composées de fonctions deux fois différentiables sur $\mathbb{R}^2$. Elles admettent donc des dérivées partielles premières et secondes $\mathbb{R}^2$.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x - 3y\sin(xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3x\sin(xy),$$

et donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4 - 3y^2\cos(xy), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -3x^2\cos(xy), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -3xy\cos(xy) - 3\sin(xy).$$

De même

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 3(x+y)^2 + ye^{xy}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 3(x+y)^2 + xe^{xy},$$

et donc

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = y^2e^{xy} + 6(x+y), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = x^2e^{xy} + 6(x+y), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = e^{xy}(xy+1) + 6(x+y).$$

Enfin on a

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{(x^2+y)^2+1}, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y)^2+1},$$

et donc

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2(-3x^4 - 2x^2y + y^2 + 1)}{((x^2+y)^2+1)^2}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{2(x^2+y)}{((x^2+y)^2+1)^2}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{4x(x^2+y)}{((x^2+y)^2+1)^2}.$$

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 :

1. en $(0,0)$ pour f. On calcule $f(0,0) = 3$, et
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$
ainsi que
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0.$$
On obtient donc, pour $(h,k) \to (0,0)$,
$$f(h,k) = 3 + 2h^2 + o(h^2+k^2).$$

2. en $(1,0)$ pour g. On calcule $g(1,0) = 2$ et
$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,0) = 3, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(1,0) = 4,$$
ainsi que
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,0) = 6, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1,0) = 7, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1,0) = 7.$$
On obtient donc, pour $(h,k) \to (0,0)$,
$$g(1+h,k) = 2 + 3h + 4k + 3h^2 + \frac{7}{2}k^2 + 7hk + o(h^2+k^2).$$

3. en $(0,0)$ pour h. On calcule $h(0,0) = \arctan(0) = 0$ et
$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = 1,$$
ainsi que
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0,0) = 2, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0,0) = 0.$$
On obtient donc, pour $(k,\ell) \to 0$,
$$h(k,\ell) = \ell + k^2 + o(k^2 + \ell^2).$$

Exercice 6. Laplacien et applications harmoniques

Pour toute fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, on définit le Laplacien de f par $\Delta f = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$ et on dit que f est harmonique sur Ω si $\Delta f = 0$ sur Ω, c'est-à-dire si elle vérifie l'équation de Laplace.

1. Si $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est différentiable sur un ouvert Ω, on note $v = (v_1, ..., v_n)$ et $\operatorname{div}(v) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_k}{\partial x_k}$ la divergence de v. Montrer que, si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est deux fois différentiable sur un ouvert Ω,
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \Delta f(x) = \operatorname{div}(\nabla_x f).$$
2. Montrer que pour $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer le Laplacien de la fonction $g : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln \|x\|_2$? Pour quelle dimension n la fonction g est-elle harmonique ?
4. Montrer que la fonction $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto \dfrac{e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}}}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}}$, appelé noyau de la chaleur, vérifie l'équation de la chaleur $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u$.

Correction.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors comme
$$\nabla_x f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right),$$
alors
$$\operatorname{div}(\nabla_x f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x) = \Delta f(x).$$
2. La fonction h est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme produit de fonctions de classe C^2, et donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 2xe^{x^2-y^2}\cos(2xy) - 2ye^{x^2-y^2}\sin(2xy)$$
et donc
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = 2e^{x^2-y^2}\left[(2x^2 - 2y^2 + 1)\cos(2xy) - 4xy\sin(2xy)\right].$$
De même, on a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = -2xe^{x^2-y^2}\sin(2xy) - 2ye^{x^2-y^2}\cos(2xy)$$

et donc
$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = -2e^{x^2-y^2}\left[(2x^2-2y^2+1)\cos(2xy) - 4xy\sin(2xy)\right],$$
d'où
$$\Delta h(x,y) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = 0,$$
et donc h est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

3. On écrit, pour tout $x \neq (0,...,0)$,
$$g(x_1,...,x_2) = \frac{1}{2}\ln\|x\|_2^2 = \frac{1}{2}\ln\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right).$$
On obtient ainsi, pour tout $x \neq (0,...,0)$,
$$\nabla_x g = \frac{1}{2}\left(\frac{2x_1}{\|x\|_2^2},...,\frac{2x_n}{\|x\|_2^2}\right),$$
et donc
$$\Delta g(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \frac{\partial\left(\frac{2x_k}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)}{\partial x_k}(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \frac{2\|x\|_2^2 - 4x_k^2}{\|x\|_2^4} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\left(\frac{2}{\|x\|_2^2} - \frac{4x_k^2}{\|x\|_2^4}\right) = \frac{n}{\|x\|_2^2} - \frac{2\sum_{k=1}^n x_k^2}{\|x\|_2^4} = \frac{n-2}{\|x\|_2^2}.$$
Ainsi, il est clair que, pour tout $x \neq 0$, $\Delta g(x) = 0 \iff \frac{n-2}{\|x\|_2^2} = 0 \iff n = 2$. C'est uniquement pour $n = 2$ que g est harmonique.

4. On calcule, pour tout $t > 0$, et tout $x \in \mathbb{R}^n$,
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}}}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\left(\|x\|_2^2 t^{-\left(\frac{n}{2}+2\right)} - nt^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right),$$
ainsi que
$$\forall k \in \{1,...,n\},\quad \frac{\partial u}{\partial x_k}(x,t) = -\frac{x_k}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}t^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)}e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}}$$
pour finalement trouvé que
$$\begin{aligned}\Delta u(x,t) &= \sum_{k=1}^n\left(-\frac{e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}}t^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\right)\left(1-\frac{x_k^2}{t}\right)\\ &= \frac{e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}}t^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{1}{t}\sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{k=1}^n 1\right)\\ &= \frac{e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}}t^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{\|x\|_2^2}{t} - n\right)\\ &= 2\frac{\partial u}{\partial t}(x,t),\end{aligned}$$
d'où le résultat.

Exercice 7. Laplacien en coordonnées polaires
Soit $f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soient (r,θ) les coordonnées polaires standard dans le plan de telle sorte que l'application
$$]0,+\infty[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\},\quad (r,\theta)\mapsto(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$
soit un changement de variable. Soit $F :]0,+\infty[\times]0,2\pi[\to\mathbb{R}$ la fonction définie par
$$F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Il s'agit de l'expression de f en coordonnées polaires. Le but de cet exercice est de calculer le Laplacien en coordonnées polaires, c'est-à-dire :

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta).$$

1. Montrer que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial F}{\partial r}\right)$.
2. Montrer que $r\dfrac{\partial F}{\partial r} = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
3. Montrer que $\dfrac{\partial F}{\partial \theta} = x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x}$.
4. Utiliser les résultats des questions précédentes et démontrer la formule demandée.
5. Déduire de la formule démontrée l'expression du laplacien de la fonction radiale f définie sur $\mathbb{R}^2$ telle que $f : (x,y) \mapsto F(\|(x,y)\|_2)$ où $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
6. **Application 1 :** Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer le laplacien de la fonction $f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}, \quad f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^s}.$$

7. **Application 2 :** Refaire le calcul des laplaciens des questions 3. et 4. de l'exercice 6 en utilisant cette nouvelle formule.

Correction.

1. On a

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial r} + r\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}.$$

2. Par composition, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$,

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta),$$

d'où

$$r\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

3. Par composition de nouveau, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$,

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = -y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

4. On a donc (en omettant les variables)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(y\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(x\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(y\frac{\partial f}{\partial x}\right).
\end{aligned}$$

Reste à calculer les quantités suivantes (par composition, en omettant les variables) :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial x} + \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\\
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(y\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial y} + \sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\\
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(x\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= -\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial y} - \cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\\
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(y\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial x} - \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},
\end{aligned}$$

et on trouve donc, en utilisant le fait que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta f.$$

5. En coordonnées polaires, on obtient :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \forall r>0, \quad f(x,y) = F(r),$$

et donc, comme les dérivées de F par rapport à θ sont nulles, on obtient

$$\Delta f(x,y) = F''(r) + \frac{1}{r}F'(r) = F''(\|(x,y)\|_2) + \frac{F'(\|(x,y)\|_2)}{\|(x,y)\|_2}.$$

6. On remarque que

$$\forall (x,y)\neq(0,0), \quad f(x,y) = \frac{1}{\|(x,y)\|_2^{2s}},$$

et donc que l'on peut écrire, en coordonnées polaires, pour tout $r>0$ et $\theta\in]0,2\pi[$,

$$F(r) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{1}{r^{2s}}.$$

On calcule donc, pour tout $r>0$,

$$\frac{1}{r}F'(r) = \frac{1}{r}\left(\frac{-2s}{r^{2s+1}}\right) = -\frac{2s}{r^{2s+2}}, \quad F''(r) = \frac{2s(2s+1)}{r^{2s+2}},$$

et donc, on obtient

$$\Delta f(x,y) = F''(r) + \frac{1}{r}F'(r) = \frac{2s(2s+1)}{r^{2s+2}} - \frac{2s}{r^{2s+2}} = \frac{4s^2}{r^{2s+2}} = \frac{4s^2}{(x^2+y^2)^{s+1}}.$$

7. On écrit, pour tout $(x,y)\neq(0,0)$ et $r>0$, $g(x,y) = F(r) = \ln r$ et on calcule

$$\Delta g(x,y) = F''(r) + \frac{1}{r}F'(r) = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0,$$

ce qui prouve que g est harmonique.
De même, la fonction u peut s'écrire, en fixant t et en notant C le dénominateur,

$$u(x,y,t) = \frac{e^{-\frac{\|(x,y)\|_2^2}{2t}}}{C} = \frac{e^{-\frac{r^2}{2t}}}{C} = F(r),$$

et ainsi, comme

$$F'(r) = -\frac{r}{t}\frac{e^{-\frac{r^2}{2t}}}{C}, \quad F''(r) = -\frac{1}{t}\frac{e^{-\frac{r^2}{2t}}}{C} + \frac{r^2}{t^2}\frac{e^{-\frac{r^2}{2t}}}{C},$$

on obtient

$$\Delta u(x,y,t) = F''(r) + \frac{1}{r}F'(r) = \frac{r^2}{t^2}\frac{e^{-\frac{r^2}{2t}}}{C} = 2\partial_t u(x,y,t).$$

Exercices supplémentaires (applications directes, en autonomie)

Exercice 8. Composées et fonctions de classe C^1
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

1. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2+2t, t^2)$. Montrer que g est de classe C^1 et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h(u,v) = f(uv, u^2+v^2)$. Montrer que h est de classe C^1 et exprimer ses dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial u}$ et $\frac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Correction.

1. La fonction $t \mapsto (2+2t, t^2)$ est de classe C^1 car ses coordonnées sont des fonctions polynomiales. Ainsi g est de classe C^1 par composition. On écrit $g(t) = f(u(t), v(t))$ avec $u(t) = 2+2t$ et $v(t) = t^2$ et on obtient
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = u'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t)) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(2+2t, t^2) + 2t\frac{\partial f}{\partial y}(2+2t, t^2).$$
2. L'application $(u,v) \mapsto (uv, u^2+v^2)$ est là encore de classe C^1 car chaque coordonnée est polynomiale, donc h est de classe C^1 par composition. Notons $r(u,v) = uv$ et $q(u,v) = u^2+v^2$, alors, comme $h(u,v) = f(r(u,v), q(u,v))$ on obtient
$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial r}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(r(u,v), q(u,v)) + \frac{\partial q}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(r(u,v), q(u,v)) = v\frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2+v^2) + 2u\frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2+v^2),$$
et de la même façon,
$$\frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial r}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(r(u,v), q(u,v)) + \frac{\partial q}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(r(u,v), q(u,v)) = u\frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2+v^2) + 2v\frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2+v^2),$$

Exercice 9. Fonctions de classe C^1
Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^1.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, telle que $\forall (x,y) \neq (0,0), f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^4+y^2}$ et $f(0,0) = 0$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, telle que $\forall (x,y) \neq (0,0), f(x,y) = x^2y^2\ln(x^2+y^2)$ et $f(0,0) = 0$.

Correction.

1. Comme on a $x^4 + y^2 = 0 \iff x^4 = y^2 = 0 \iff (x,y) = (0,0)$, il est clair que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions de classe C^1. Etudions la fonction en $(0,0)$. Pour cela, on calcule ses dérivées partielles en tout point $(x,y) \neq (0,0)$:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y^3(3x^4 - y^2)}{(x^4+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{xy^2(3x^4+y^2)}{(x^4+y^2)^2}.$$
De plus, on a, pour tout $h \neq 0$ et $k \neq 0$,
$$\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \quad \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0,$$
ce qui veut dire que
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Montrons que les dérivées partielles de f sont continues en $(0,0)$. En effet, on a, quand $(x,y)\to(0,0)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \left|-\frac{y^3(3x^4-y^2)}{(x^4+y^2)^2}\right| \le \frac{3x^4|y|^3}{(x^4+y^2)^2}+\frac{|y|^5}{(x^4+y^2)^2} \le \frac{3(x^4+y^2)|y|(x^4+y^2)}{(x^4+y^2)^2}+\frac{|y|(x^4+y^2)^2}{(x^4+y^2)^2}$$
$$\le 3|y|+|y| = 4|y| \to 0$$

en utilisant le fait que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x^4\le x^4+y^2$, $y^2\le x^4+y^2$ et $y^4\le (x^4+y^2)^2$ (qui découle de l'inégalité précédente). De même, quand $(x,y)\to(0,0)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \left|\frac{xy^2(3x^4+y^2)}{(x^4+y^2)^2}\right| \le \frac{3|x|^5y^2}{(x^4+y^2)^2}+\frac{|x|y^4}{(x^4+y^2)^2} \le \frac{3|x|(x^4+y^2)^2}{(x^4+y^2)^2}+\frac{|x|(x^4+y^2)^2}{(x^4+y^2)^2} = 4|x|\to 0.$$

La fonction est donc de classe C^1 en $(0,0)$, et donc sur $\mathbb{R}^2$.

2. Il est clair que comme $x^2+y^2\le 0 \iff x^2=y^2=0 \iff (x,y)=(0,0)$, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ comme produit et composée de fonctions de classe C^1. Etudions la fonction au point $(0,0)$. Par symétrie des variables x et y, $f(x,y)=f(y,x)$, on ne traite que la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ au point $(0,0)$. On a, pour tout point $(x,y)\neq(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2\ln(x^2+y^2)+\frac{2x^3y^2}{x^2+y^2}.$$

De plus, on a, pour tout $h\neq 0$,
$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0,$$
et ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$. Enfin, pour tout $(x,y)\neq(0,0)$, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| &\le 2|x|y^2|\ln(x^2+y^2)|+\frac{2x^2|y|^3}{x^2+y^2}\\ &\le 2(x^2+y^2)|\ln(x^2+y^2)|\times|x|+\frac{2(x^2+y^2)|y|^3}{x^2+y^2}\\ &\le 2\|(x,y)\|_2^2|\ln\|(x,y)\|_2^2\times|x|+2|y|^3\to 0\end{aligned}$$

quand $(x,y)\to(0,0)$ car $r\ln r\to 0$ quand $r\to 0^+$. On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$ et donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ l'est aussi par symétrie des variables, et f est donc de classe C^1 en $(0,0)$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10. Matrices hessiennes

Déterminer les matrices hessiennes des fonctions suivantes sur leur domaine de définition, puis au point a donné.

1. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=(x+y+z)^2$, $a=(1,-1,1)$.
2. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$, $a=(2,0,-1)$.
3. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=\sin(xyz)$, $a=(\pi,0,1)$.
4. $f:\mathbb{R}^2\backslash\{(0,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in\mathbb{R}\}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\sin^2\left(\frac{y}{x}\right)$, $a=(3,\pi)$.

Correction. Les fonctions données dans cet exercices sont deux fois différentiables comme sommes et composées de fonctions deux fois différentiables sur leur ensemble de définition. Elles admettent donc des dérivées partielles premières et secondes sur cet ensemble.

1. On calcule facilement, pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=2(x+y+z).$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)=2.$$

La hessienne de f au point (x,y,z) est donc

$$H_f(x,y,z)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

2. On a, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x^3-4(x-y),\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=4y^3-4(y-x),$$

et on obtient donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=12x^2-4,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=12y^2-4,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=4,$$

et la hessienne de f au point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ est

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 12x^2-4 & 4\\ 4 & 12y^2-4\end{pmatrix}.$$

3. Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=yz\cos(xyz),\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=xz\cos(xyz),\quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=xy\cos(xyz).$$

et on a donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z)&=z\cos(xyz)-xyz^2\sin(xyz)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z)&=y\cos(xyz)-xy^2z\sin(xyz)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z)&=x\cos(xyz)-x^2yz\sin(xyz)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)&=-y^2z^2\sin(xyz)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)&=-x^2z^2\sin(xyz)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)&=-x^2y^2\sin(xyz).
\end{aligned}$$

et ainsi la hessienne de f au point (x,y,z) est

$$H_f(x,y,z)=\begin{pmatrix} -y^2z^2\sin(xyz) & z\cos(xyz)-xyz^2\sin(xyz) & y\cos(xyz)-xy^2z\sin(xyz)\\ z\cos(xyz)-xyz^2\sin(xyz) & -x^2z^2\sin(xyz) & x\cos(xyz)-x^2yz\sin(xyz)\\ y\cos(xyz)-xy^2z\sin(xyz) & x\cos(xyz)-x^2yz\sin(xyz) & -x^2y^2\sin(xyz)\end{pmatrix}$$

4. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x\neq 0$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{y\sin\left(\frac{2y}{x}\right)}{x^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\sin\left(\frac{2y}{x}\right)}{x},$$

et ainsi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2y\left(x\sin\left(\frac{2y}{x}\right) + y\cos\left(\frac{2y}{x}\right)\right)}{x^4}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2\left(\cos^2\left(\frac{y}{x}\right) - \sin^2\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{x^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{x\sin\left(\frac{2y}{x}\right) + 2y\cos\left(\frac{2y}{x}\right)}{x^3},$$

ce qui implique que la hessienne de f au point (x,y) est

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2y\left(x\sin\left(\frac{2y}{x}\right)+y\cos\left(\frac{2y}{x}\right)\right)}{x^4} & -\frac{x\sin\left(\frac{2y}{x}\right)+2y\cos\left(\frac{2y}{x}\right)}{x^3} \\ -\frac{x\sin\left(\frac{2y}{x}\right)+2y\cos\left(\frac{2y}{x}\right)}{x^3} & \frac{2\left(\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)-\sin^2\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{x^2} \end{pmatrix}$$