Feuille 5 : Différentielle d'ordre k et fonctions de classe C^k

Objectifs	OUI	NON
Déterminer la différentielle seconde d'une application et sa hessienne		
Montrer qu'une application est de classe C^k		
Appliquer le théorème de Schwarz		
Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (voire 3)		
Calculer l'expression d'une opérateur différentiel (Laplacien, divergence)		

Exercice 1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\alpha < 2$.
2. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer toutes les valeurs de α pour lesquelles f est différentiable en $(0,0)$.
4. Déterminer toutes les valeurs de α pour lesquelles f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Preuve fausse à corriger
Déterminer toutes les erreurs commises dans la preuve ci-dessous et la corriger.
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrons que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.
En effet, les dérivées partielles premières de f en $(0,0)$ se calculent comme suit :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0.$$

De plus, comme f est différentiable sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, on a, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{yx^2(x^2+3y^2)}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

et donc, pour tout $h \neq 0$ et pour tout $k \neq 0$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,k) = 0,$$

et donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = 0 = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

On en déduit que f est deux fois différentiable au point $(0,0)$.

Exercice 3. Egalité des dérivées partielles croisées
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et sont égales.
2. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ne sont pas continues en $(0,0)$.

Exercice 4. Formules de Taylor-Young – Applications du cours
Ecrire la formule de Taylor-Young :
1. à l'ordre deux pour une fonction de trois variables ;
2. à l'ordre trois pour une fonction de deux variables ;
3. à l'ordre treize en $(0,0)$ pour $f(x,y) = y^5 + x^3y - x^2 + y$.

Exercice 5. Formules de Taylor-Young – Calculs
Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions suivantes :
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^2 + 3\cos(xy)$;
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = e^{xy} + (x+y)^3$;
- $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = \arctan(x^2+y)$.

Puis déterminer les formules de Taylor-Young à l'ordre 2 en $(0,0)$ pour f et h, et en $(1,0)$ pour g.

Exercice 6. Laplacien et applications harmoniques
Pour toute fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, on définit le Laplacien de f par $\Delta f = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$ et on dit que f est harmonique sur Ω si $\Delta f = 0$ sur Ω, c'est-à-dire si elle vérifie l'équation de Laplace.

1. Si $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est différentiable sur un ouvert Ω, on note $v = (v_1, ..., v_n)$ et $\operatorname{div}(v) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_k}{\partial x_k}$ la divergence de v. Montrer que, si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est deux fois différentiable sur un ouvert Ω,
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \Delta f(x) = \operatorname{div}(\nabla_x f).$$
2. Montrer que pour $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.
3. Que peut-on dire du Laplacien de la fonction $g : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln \|x\|_2$? Pour quelle dimension n la fonction g est-elle harmonique ?
4. Montrer que la fonction $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto \dfrac{e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}}}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}}$, appelé noyau de la chaleur, vérifie l'équation de la chaleur $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u$.

Exercice 7. Laplacien en coordonnées polaires
Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soient (r,θ) les coordonnées polaires standard dans le plan de telle sorte que l'application

$$]0,+\infty[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, \quad (r,\theta) \mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

soit un changement de variable. Soit $F :]0,+\infty[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Il s'agit de l'expression de f en coordonnées polaires. Le but de cet exercice est de calculer le Laplacien en coordonnées polaires, c'est-à-dire :

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta).$$

1. Montrer que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial F}{\partial r}\right)$.
2. Montrer que $r\dfrac{\partial F}{\partial r} = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
3. Montrer que $\dfrac{\partial F}{\partial \theta} = x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x}$.
4. Utiliser les résultats des questions précédentes et démontrer la formule demandée.
5. Déduire de la formule démontrée l'expression du laplacien de la fonction radiale f définie sur $\mathbb{R}^2$ telle que $f : (x,y) \mapsto F(\|(x,y)\|_2)$ où $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
6. **Application 1 :** Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer le laplacien de la fonction $f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}, \quad f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{2s}}.$$
7. **Application 2 :** Refaire le calcul des laplaciens des questions 3. et 4. de l'exercice 6 en utilisant cette nouvelle formule.

Exercices supplémentaires (applications directes, en autonomie)

Exercice 8. Composées et fonctions de classe C^1
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

1. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2+2t, t^2)$. Montrer que g est de classe C^1 et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h(u,v) = f(uv, u^2+v^2)$. Montrer que h est de classe C^1 et exprimer ses dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial u}$ et $\frac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 9. Fonctions de classe C^1
Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^1.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, telle que $\forall (x,y) \neq (0,0), f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^4+y^2}$ et $f(0,0) = 0$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, telle que $\forall (x,y) \neq (0,0), f(x,y) = x^2y^2\ln(x^2+y^2)$ et $f(0,0) = 0$.

Exercice 10. Matrices hessiennes
Déterminer les matrices hessiennes des fonctions suivantes sur leur domaine de définition, puis au point a donné.

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = (x+y+z)^2$, $a = (1,-1,1)$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$, $a = (2,0,-1)$.
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \sin(xyz)$, $a = (\pi,0,1)$.
4. $f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sin^2\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $a = (3,\pi)$.