# Feuille 4 : Différentiabilité
# CORRECTION

**Exercice 1. Preuve fausse à corriger**
Déterminer toutes les erreurs commises dans la preuve ci-dessous et la corriger.
*Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto e^{-x^2-y^2} \sin(x^2 + y^2)$ *alors, pour tout* $(h, k) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{|f(h,k) - f(0,0)|}{\|(h,k)\|_2^2} = \frac{e^{-h^2-k^2} \left|\sin(h^2+k^2)\right|}{h^2+k^2} \leq \frac{1}{h^2+k^2} \to +\infty$$

*quand* $(h, k) \to (0, 0)$*, où on a utilisé que* $|\sin(t)| \leq 1$ *et* $e^{-t} \leq 1$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$*. Ainsi,* $f$ *n'est pas différentiable en* $(0, 0)$.

**Correction.** Les erreurs dans cette preuve sont les suivantes :

1. On doit écrire ces inégalités pour $(h, k) \neq (0, 0)$.
2. On a $e^{-t} \leq 1$ pour $t \in \mathbb{R}_+$ (et non pas $\mathbb{R}$).
3. L'argument est clairement faux, car ce n'est pas le bon quotient à considérer pour étudier la différentiabilité. De plus, majorer ce quotient par quelque chose qui tend vers l'infini ne donne aucune information sur la limite de ce quotient.

Montrons que $f$ est différentiable en $(0, 0)$. Pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, on a

$$\frac{|f(h,k) - f(0,0)|}{\|(h,k)\|_2} = \frac{e^{-h^2-k^2} \left|\sin(h^2+k^2)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \|(h,k)\|_2 e^{-\|(h,k)\|_2^2} \frac{\sin(\|(h,k)\|_2^2)}{\|(h,k)\|_2^2}.$$

Or, on a, quand $(h, k) \to (0, 0)$, $\|(h, k)\|_2 \to 0$ et il suffit donc de déterminer, en posant $t = \|(h, k)\|_2$, $\lim_{t\to 0} te^{-t^2} \frac{\sin(t^2)}{t^2}$. Comme $\lim_{t\to 0} e^{-t^2} = 1$ et $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t^2)}{t^2} = 1$, on trouve que $\lim_{t\to 0} te^{-t^2} \frac{\sin(t^2)}{t^2} = 0$ et donc

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(h,k) - f(0,0)|}{\|(h,k)\|_2} = 0,$$

donc $f(h, k) - f(0, 0) = o(\|(h, k)\|_2)$ ce qui prouve que $f$ est différentiable de différentielle nulle.

**Exercice 2. Différentielle et fonction linéaire**
Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ différentiable. On suppose que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Montrer que $f$ est linéaire.

1. On a $f(0) = f(0 \times 0) = 0f(0) = 0$ en appliquant l'identité à $\lambda = 0$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors comme $f$ est différentiable en 0, on a, quand $\lambda \to 0$,

$$f(\lambda x) = f(0) + D_0 f(\lambda x) + o(\lambda)$$

d'où, en utilisant le fait que $f(0) = 0$, $D_0 f$ soit linéaire et l'identité de l'énoncé, on obtient

$$\lambda f(x) = \lambda D_0 f(x) + o(\lambda),$$

ce qui donne, en divisant par $\lambda \neq 0$,

$$f(x) = D_0 f(x) + o(1),$$

ce qui permet de conclure, en faisant tendre $\lambda$ vers 0, que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = D_0 f(x),$$

et donc que $f$ est linéaire.

**Exercice 3. Calcul de différentielles - Applications directes du cours**
Déterminer les différentielles $D_{x_0} f$ pour chacune des applications $f$ et des points $x_0$ suivants.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 1$, $x_0 = \sqrt{\pi}$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x^2 - \sin(x)$, $x_0 = 0$.
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 3x - y$, $x_0 = (1, 2)$.
4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x + y, 3x - 2y)$, $x_0 = (0, 0)$.
5. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 3\|(x, y)\|_2^2 + \Phi(x, y)$, $x_0 = (1, -1)$ où $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est bilinéaire.

**Correction.**

1. On a, $\forall h \in \mathbb{R}$, $D_{\sqrt{\pi}} f(h) = -4h$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -4$.
2. On a, $\forall h \in \mathbb{R}$, $D_0 f(h) = 0$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x + 2x - \cos(x)$ et $f'(0) = 0$.
3. On a, $\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2$, $D_{(1,2)} f(h, k) = 3h - k$ puisque $f$ est une application linéaire.
4. On a, $\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2$, $D_{(0,0)} f(h, k) = (2h + k, 3h - 2k)$ car $f$ est une application linéaire.
5. On a, $\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2$, $D_{(1,-1)} f(h, k) = 6\langle (1, -1), (h, k) \rangle + \Phi(1, k) + \Phi(h, -1) = 6h - 6k + \Phi(1, k) + \Phi(h, -1)$.

**Exercice 4. Dérivées directionnelles**
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ admet en $(0, 0)$ une dérivée suivant tout vecteur
2. $f$ est-elle différentiable en $(0, 0)$ ?

**Correction.**

1. Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, alors on a

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f((0, 0) + tv) - f(0, 0)}{t} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(tv_1, tv_2)}{t}.$$

Si $v_1 = 0$, alors $\displaystyle\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(tv_1, tv_2)}{t} = \frac{0}{t} = 0$.
Si $v_1 \neq 0$, alors

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(tv_1, tv_2)}{t} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{t^2 v_2^2 \ln |tv_1|}{t} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} t \ln |t| v_2^2 + t v_2^2 \ln |v_1| = 0.$$

On a donc $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}^2$.

2. Soit $y \neq 0$, alors on considère le point $(e^{-\frac{1}{y^2}}, y)$ qui tend vers $(0, 0)$ quand $y \to 0$. De plus, on a

$$\forall y \neq 0, \quad f(e^{-\frac{1}{y^2}}, y) = 1 \neq 0.$$

Ainsi, $f$ n'est pas continue en $(0, 0)$, donc non-différentiable en ce point.

**Exercice 5. Calcul de dérivées partielles**
Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes et préciser le domaine de validité des calculs.

1. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
2. $f(x,y) = x\cos(x+2y)$.
3. $f(x,y) = x^y$.
4. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.
5. $f(x,y) = \arctan(2x-3y)$.
6. $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^n \backslash \{(0,0)\}$, alors
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$
2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(x+2y) - x\sin(x+2y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x\sin(x+2y).$$
3. Soit $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, alors $f(x,y) = e^{y\ln(x)}$ et ainsi
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x}e^{y\ln(x)} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln(x)e^{y\ln(x)} = x^y\ln(x).$$
4. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^n \backslash \{(0,0)\}$, alors
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2-2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$
5. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{1+(2x-3y)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{3}{1+(2x-3y)^2}.$$
6. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^n \backslash \{(0,0)\}$, alors
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}.$$

**Exercice 6. Différentielles de fonctions composées**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables. Justifier que les applications suivantes sont différentiables et calculer leur différentielle.

1. $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x,-x)$.
2. $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto g(y,x)$.
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x+g(x,y))$.
4. $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(xy^2g(x,y))$.

**Correction.**

1. Soit $x, h \in \mathbb{R}$, alors
$$D_x\phi(h) = \phi'(x)h = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,-x) - \frac{\partial g}{\partial y}(x,-x)\right)h.$$

2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$D_{(x,y)}\psi(h,k) = \frac{\partial f}{\partial y}(y,x)h + \frac{\partial f}{\partial x}(y,x)k.$$

3. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \left(1 + \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right) f'(x+g(x,y)), \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) f'(x+g(x,y)),$$

et on obtient donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ :

$$D_{(x,y)}h(u,v) = \left(1 + \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right) f'(x+g(x,y))u + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) f'(x+g(x,y))v.$$

4. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$\frac{\partial k}{\partial x}(x,y) = \left(y^2 g(x,y) + xy^2 \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right) f'(xy^2 g(x,y)), \quad \frac{\partial k}{\partial y}(x,y) = \left(2yxg(x,y) + xy^2 \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) f'(xy^2 g(x,y))$$

et on obtient donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ :

$$D_{(x,y)}k(u,v) = \left(y^2 g(x,y) + xy^2 \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right) f'(xy^2 g(x,y))u + \left(2yg(x,y) + xy^2 \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) f'(xy^2 g(x,y))v$$

**Exercice 7. Développement à l'ordre 1 et composées**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable au point $(0,1)$ et tel que

$$f(0,1) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 2.$$

1. Déterminer le développement de Taylor-Young à l'ordre 1 de $f$ au voisinage du point $(0,1)$.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 1 et au voisinage de 0 des fonctions $t \mapsto f(-2t, e^t)$ et $t \mapsto f(t, \cosh t)$.

**Correction.**

1. Par différentiabilité de $f$ en $(0,1)$, on a, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(h, 1+k) = f(0,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)k + o(\sqrt{h^2+k^2}) = h + 2k + o(\sqrt{h^2+k^2}).$$

2. Comme $(-2\times 0, e^0) = (0,1)$, que $f$ est différentiable en $(0,1)$ et que $t \mapsto (-2t, e^t)$ est différentiable en 0, puisque chacune de ces fonctions sont dérivables en 0, alors $F : t \mapsto (-2t, e^t)$ est différentiable en 0 et on a, pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$F(h) = F(0) + F'(0)h + o(|h|),$$

avec

$$F'(0) = -2\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) + e^0 \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -2 + 2 = 0,$$

d'où, comme $F(0) = f(0,1) = 0$,

$$F(h) = o(|h|).$$

De même, par des arguments identiques, en remarquant encore une fois que $(0, \cosh(0)) = (0,1)$, on obtient, en notant $G : t \mapsto f(t, \cosh t)$, pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$G(h) = G(0) + G'(0)h + o(|h|),$$

avec

$$G'(0) = 1 \times \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) + \sinh(0)\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 1 + 0 = 1,$$

d'où finalement

$$G(h) = h + o(|h|).$$

**Exercice 8. Valeur approchée**

1. Déterminer une valeur approchée (à la main, sans machine!) du réel $\alpha = \dfrac{(0.998)^3}{1.003}$ en utilisant l'approximation linéaire d'une certain fonction à déterminer au voisinage d'un point que l'on précisera.
2. A l'aide d'une machine, on trouve que $\alpha \approx 0.9910389$ où toutes les décimales sont exactes. Comparer cette valeur avec celle trouvée à la question précédente en expliquant pourquoi l'ordre de grandeur de l'erreur entre celles-ci était prévisible.

**Correction.**

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{x^3}{y}$. Cette fonction est différentiable au point $(1, 1)$ comme quotient de fonctions différentiables, et on a donc, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $1 + k \neq 0$, au voisinage du point $(1, 1)$,
$$f(1 + h, 1 + k) = f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)h + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)k + o(\sqrt{h^2 + k^2}).$$
On calcule aisément, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3x^2}{y}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{x^3}{y^2},$$
ce qui donne $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 3$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -1$.
Ainsi, en appliquant le développement de Taylor-Young à $h = -0.002$ et $h = 0.003$, on obtient
$$f(1-h, 1+k) = \frac{(0.998)^3}{1.003} \approx f(1, 1) - 0.002\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) + 0.003\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 1 - 3\times 0.002 + 1\times 0.003 = 0.991.$$
2. On voit que le résultat trouvé à la question précédente est exact à $10^{-3}$ près. Cet ordre de grandeur était prévisible puisque l'erreur dans la formule de Taylor-Young est négligeable devant $\sqrt{h^2 + k^2}$ qui vaut ici $\sqrt{0.002^2 + 0.003^2} \approx 3.6 \times 10^{-3}$.

**Exercice 9. Développement à l'ordre 1 d'une fonction de $n$ variables**

Soit $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \neq (0, ..., 0), \quad f(x) = \frac{1}{\|x\|_2^2},$$
et, pour $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ $g_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad g_a(x) = \langle a, x\rangle e^{-\|x\|_2^2}.$$
Après avoir brièvement expliqué pourquoi $f$ et $g$ sont différentiables, déterminer le développement à l'ordre 1 de ces fonctions au voisinage de $y = (y_1, ...y_n)$, non-nul pour $f$, quelconque pour $g$.

**Correction.** Ces deux fonctions sont différentiables respectivement comme quotient et produit de fonctions différentiables dont le dénominateur ne s'annule pas pour $f$ puisque, par séparation de la norme euclidienne,
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_2^2 = 0 \iff \|x\|_2 = 0 \iff x = 0.$$
On écrit, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,
$$f(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$
et donc
$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) = -\frac{2x_i}{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2} = -2\frac{x_i}{\|x\|_2^4}.$$

On obtient donc, pour tout $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $y + h \neq 0$,

$$f(y+h) = f(y) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) h_i + o(\|h\|_2),$$

c'est-à-dire

$$f(y+h) = \frac{1}{\|y\|_2^2} - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i h_i}{\|y\|_2^4} + o(\|h\|_2).$$

De même, pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on écrit

$$g(x_1, ..., x_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right) \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right),$$

et donc, par dérivation du produit,

$$\begin{aligned}
\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) &= a_i e^{-\|x\|_2^2} + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right)(-2x_i) e^{-\|x\|_2^2} \\
&= \left(a_i - 2x_i \sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right) e^{-\|x\|_2^2} \\
&= (a_i - 2x_i \langle a, x\rangle) e^{-\|x\|_2^2}.
\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
g(y+h) &= \langle a, y\rangle e^{-\|y\|_2^2} + \sum_{i=1}^{n} (a_i - 2y_i \langle a, y\rangle) e^{-\|y\|_2^2} h_i + o(\|h\|_2) \\
&= \langle a, y\rangle e^{-\|y\|_2^2} + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i h_i\right) e^{-\|y\|_2^2} - 2\langle a, y\rangle \left(\sum_{i=1}^{n} y_i h_i\right) e^{-\|y\|_2^2} + o(\|h\|_2) \\
&= (\langle a, y+h\rangle - 2\langle a, y\rangle\langle y, h\rangle)\, e^{-\|y\|_2^2} + o(\|h\|_2).
\end{aligned}$$

**Exercice 10. Différentiabilité à l'origine**
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ admet des dérivées partielles en $(0,0)$.
2. Si $f$ était différentiable en $(0,0)$, déduire de la question précédente quel serait sa différentielle.
3. Montrer que $f$ est différentiable en $(0,0)$.

**Correcton.**

1. Soit $t \neq 0$, alors, quand $t \to 0$,

$$\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = t \sin\left(\frac{1}{|t|}\right) \to 0,$$

$$\frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0 \to 0.$$

   Donc $f$ admet des dérivées partielles nulles en $(0,0)$.

2. Si $f$ est différentiable en $(0,0)$, on aurait nécessairement $D_{(0,0}f(h,k) = 0$ pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ d'après la question précédente.
3. Pour tout $(h,k) \neq (0,0)$, on a, quand $(h,k) \to (0,0)$,

$$\frac{|f(h,k) - f(0,0)|}{\|(h,k)\|_2} = \frac{|h|^2 \left|\sin\left(\frac{1}{\|(h,k)\|_2}\right)\right|}{\|(h,k)\|_2} \leq \frac{|h|^2}{\|(h,k)\|_2} \leq \frac{\|(h,k)\|_2^2}{\|(h,k)\|_2} = \|(h,k)\|_2 \to 0.$$

On en déduit que $f$ est différentiable en $(0,0)$ et que sa différentielle est bien $D_{(0,0)}f(h,k) = 0$ pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$.

**Exercice 11. Calculs de matrices jacobiennes, de différentielles et de jacobiens**
Déterminer la matrice jacobienne, la différentielle et le jacobien (quand il existe) des applications $f$ suivantes au point $a$ donné.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sin(x^2 y)$, $a = (1,0)$.
2. $f : (\mathbb{R}^*)^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}, e^{-x^2}y\right)$, $a = (1,-1)$.

**Correction.**

1. On calcule les dérivées partielles de $f$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy\cos(x^2 y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2\cos(x^2 y)$$

et donc, au point $a$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1,$$

et donc

$$J_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La différentielle de $f$ en $a$ est donc

$$D_a f(h,k) = J_f(1,0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = k.$$

2. On calcule les dérivées partielles de $f = (f_1, f_2)$ :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y^2}$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = -2xe^{-x^2}y, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = e^{-x^2}$$

et donc, au point $a$, on a

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(1-1) = -1 \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,-1) = 1$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(1,-1) = 2e^{-1} \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,-1) = e^{-1}$$

et donc

$$J_f(1,-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2e^{-1} & e^{-1} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que, pour tout $(h,k) \in (\mathbb{R}^*)^2$, on a

$$D_{(1,-1)}f(h,k) = J_f(1,-1)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2e^{-1} & e^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h+k \\ 2e^{-1}h + e^{-1}k \end{pmatrix}.$$

De plus, le jacobien de $f$ au point $a$ vaut $\det(J_f(1,-1)) = -e^{-1} - 2e^{-1} = -3e^{-1}$.

**Exercice 12. Gradient et composée**

Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ différentiable telle que $\nabla_{(1,1,1)}f=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}$ et soit $\varphi:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^3$ définie pour tout $t\neq 0$ par

$$\varphi(t)=\left(t^2,\frac{1}{t^3},t\right).$$

1. Déterminer $D_{(1,1,1)}f(h)$ pour tout $h\in\mathbb{R}^3$.
2. En déduire $(f\circ\varphi)'(1)$.

**Correction.**

1. La réponse est directement donnée par le gradient de $f$ au point $(1,1,1)$, c'est-à-dire
$$D_{(1,1,1)}f(h)=5h_1+2h_2+h_3.$$
2. Par composition, on a
$$(f\circ\varphi)'(1)=D_{\varphi(1)}f(\varphi'(1)),$$
avec
$$\varphi'(1)=(2,-3,1).$$
On obtient donc $(f\circ\varphi)'(1)=5\times 2+2\times(-3)+1\times 1=5$.

**Exercice 13. Dérivation le long d'un arc**

Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une application différentiable, $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\varphi: I\to\mathbb{R}^n$, $t\mapsto(x_1(t),...,x_n(t))$ un arc paramétré dérivable et $\mathcal{C}=\varphi(I)$ la courbe géométrique associée.

1. Montrer que, pour tout $t_0\in I$, $(f\circ\varphi)'(t_0)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t_0))x_i'(t_0)$.
2. Soit $\varphi(t_0)\in\mathbb{R}^n$ un point singulier de $\mathcal{C}$. Calculez $(f\circ\varphi)'(t_0)$.
3. Si $n=2$, $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $t\mapsto(at+b,ct+d)$ où $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$. Montrer que, pour tout $t_0\in\mathbb{R}$,
$$(f\circ\varphi)'(t_0)=\frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(t_0)),\quad v=(a,c).$$
Dans ce cas, quelle est la nature de $\mathcal{C}$ ? Comment appelle-t-on $v$ pour la courbe $\mathcal{C}$ ?
4. Soit $n=2$. On suppose que $\mathcal{C}$ est une courbe régulière paramétrée par $\varphi$ de telle sorte que $\|\varphi'(t)\|_2=1$ pour tout $t\in I$. Montrer que, pour tout $t\in I$, $(f\circ\varphi)'(t)$ est la dérivée de $f$ en $\varphi(t)$ le long du vecteur tangent unitaire à $\mathcal{C}$ en ce point.
Que vaut cette quantité si $\|\varphi'(t)\|_2$ ne vaut pas toujours $1$ ?
5. *Application :* soit $\varphi:]0,2\pi[\to\mathbb{R}^2$, $t\mapsto(\cos t,\sin t)$, et $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$. Déterminer la dérivée de $f$ en $(1/2,\sqrt{3}/2)$ le long du vecteur tangent unitaire à $\mathcal{C}=\varphi(]0,2\pi[)$ en ce point.

**Correction.**

1. Soit $t_0\in I$, alors, d'après le cours (par dérivation d'une composée),
$$(f\circ\varphi)'(t_0)=D_{\varphi(t_0)}f(\varphi'(t_0))=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t_0))x_i'(t_0).$$
2. Si $\varphi(t_0)$ est un point singulier, alors $\varphi'(t_0)=(0,...,0)$, donc d'après la formule précédente, on a $(f\circ\varphi)'(t_0)=0$.
3. Soit $t_0\in\mathbb{R}$. Comme $x_1'(t_0)=a$ et $x_2'(t_0)=c$, alors
$$(f\circ\varphi)'(t_0)=D_{\varphi(t_0)}f(a,c)=\frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(t_0)).$$
Dans ce cas, $\mathcal{C}$ est une droite paramétrée de vecteur directeur $v$ et passant par le point $(b,d)$. En effet, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\varphi(t)=(a,c)t+(b,d)$.

4. Soit $t \in I$. On remarque que si $\|\varphi'(t)\| = 1$, alors le vecteur tangent à la courbe $\mathcal{C}$ au point $\varphi(t)$ est donné par $T(t) = \varphi'(t)$. On en déduit donc que
$$(f \circ \varphi)'(t) = D_{\varphi(t)} f(T(t)) = \frac{\partial f}{\partial T(t)}(\varphi(t)),$$
qui est bien la dérivée de $f$ en $\varphi(t)$ le long du vecteur tangent $T(t)$ à $\mathcal{C}$ en ce point.
Dans le cas général, on obtient
$$(f \circ \varphi)'(t) = D_{\varphi(t)} f(\varphi'(t)) = D_{\varphi(t)} f(\|\varphi'(t)\| T(t)) = \|\varphi'(t)\| D_{\varphi(t)} f(T(t)) = \|\varphi'(t)\| \frac{\partial f}{\partial T(t)}(\varphi(t)).$$
5. On remarque que, pour tout $t \in ]0, 2\pi[$, $\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t)$ et donc $\|\varphi'(t)\|_2 = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$. De plus, $(1/2, \sqrt{3}/2) = \varphi(\pi/3)$. Ainsi, la paramétrisation $\varphi$ est régulière et $f$ est différentiable, donc on cherche simplement à calculer
$$\begin{aligned}(f \circ \varphi)'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\partial f}{\partial x}(1/2, \sqrt{3}/2) x_1'(\pi/3) + \frac{\partial f}{\partial y}(1/2, \sqrt{3}/2) x_2'(\pi/3) \\ &= -2 \times \frac{1}{2} e^{-1}(-\sin(\pi/3)) - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-1} \cos(\pi/3) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-1} - \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-1} = 0,\end{aligned}$$
car $\nabla_{(x,y)} f = (-2xe^{-x^2-y^2}, -2ye^{-x^2-y^2})$ en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2 = 1$. On remarque aussi que $\mathcal{C}$ est le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ privé du point $(1, 0)$.

**Exercice 14. Plan tangent et approximation linéaire**
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, \quad f(x,y) = \ln(4x^2 + y^2).$$
Cette fonction définie la surface $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \times \mathbb{R} : z = f(x,y)\}$.

1. Justifier que $f$ est différentiable.
2. Déterminer sans machine une valeur approchée de $f(1.1, 2.2)$ sachant que $\ln(2) \approx 0.7$.
Attention : il y avait ici une erreur dans l'énoncé, le point à considérer est bien $(1.1, 2.2)$ afin de ne pas à avoir à refaire de calculs dans la question suivante.
3. Déterminer l'équation du plan tangent à $S$ au point $(1, 2, \ln(8))$.
4. Trouver un point $P \in S$ tel que le plan tangent à $S$ au point $P$ soit parallèle au plan d'équation $2x + 2y - z = 3$.

**Correction.**

1. $f$ est différentiable comme composée de fonctions différentiables car, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
$$4x^2 + y^2 \leq 0 \iff 4x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0.$$
2. On remarque que $f$ est différentiable en $(1, 2)$ et donc que l'on a, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $1 + h \neq 0$ et $2 + k \neq 0$ simultanément,
$$f(1+h, 2+k) = f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)h + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)k + o(\sqrt{h^2 + k^2}.$$
Comme, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{8x}{4x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{4x^2 + y^2},$$
on obtient
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{8}{8} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$
et ainsi
$$f(1.1, 2.2) \approx \ln(8) + 1 \times 0.1 + \frac{1}{2} \times 0.2 = 3\ln(2) + 0.2 \approx 3 \times 0.7 + 0.2 = 2.3.$$

3. On remarque que ce point appartient bien à la surface $(S)$ puisque $f(1,2)=\ln(8)$. L'équation du plan tangent à $(S)$ en ce point est donc

$$z = f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2),$$

c'est-à-dire, d'après les calculs faits à la question précédente,

$$z = x + \frac{y}{2} - 2 + \ln(8).$$

4. On réécrit l'équation du plan sous la forme $z = 2x+2y-3$. On cherche donc un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2,$$

c'est-à-dire vérifiant

$$\frac{8x}{4x^2+y^2} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{2y}{4x^2+y^2} = 2,$$

ce qui implique que $8x = 2y$, c'est-à-dire $y = 4x$, d'où en remplaçant,

$$\frac{8x}{4x^2+16x^2} = 2 \iff \frac{2}{5x} = 2 \iff x = \frac{1}{5}$$

et on trouve le point $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ qui vérifie bien la deuxième équation car $\frac{2\times\frac{4}{5}}{4\times\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2} = 2$. Le point de $(S)$ qui correspond est donc

$$P = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \ln\left(\frac{4}{5}\right).\right)$$

---

**Exercices supplémentaires (applications directes, en autonomie)**

**Exercice 15. Calculs de différentielles**
Déterminer la différentielle de chacune des applications suivantes sur leur domaine de définition :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x^2, y^2x^3, x+3y)$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, $f(x) = (x^2, \cos(x), \arctan(x^5), \sinh(x^2-1))$.

**Correction.**

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, alors, en notant $f = (f_1, f_2, f_3)$, on obtient que

$$D_{(x,y)}f_1(h,k) = 2xh, \quad D_{(x,y)}f_2(h,k) = 3x^2y^2h + 2yx^3k, \quad D_{(x,y)}f_3(h,k) = h+3k,$$

et donc

$$D_{(x,y)}f(h,k) = \left(2xh, 3x^2y^2h + 2yx^3k, h+3k\right).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$, alors

$$D_x f(h) = \left(2xh, -\sin(x)h, \frac{5x^4h}{1+x^{10}}, 2x\cosh(x^2-1)h\right)$$

**Exercice 16. Contre-exemple**
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ admet des dérivées partielles en $(0,0)$.
2. La fonction $f$ est-elle différentiable en $(0,0)$ ?

**Correction.**

1. Soit $t \neq 0$, alors
$$\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0.$$
On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
2. On remarque que, pour tout $t \neq 0$,
$$f(t,t^2) = \frac{t^4}{t^4+t^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$
et donc que $f$ n'est pas continue en $(0,0)$ et donc non-différentiable en $(0,0)$.

**Exercice 17. Calculs de matrices jacobiennes, de différentielles et de jacobiens**
Déterminer la matrice jacobienne, la différentielle et le jacobien (quand il existe) des applications $f$ suivantes au point $a$ donné.

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x,y,z) = (x-y, z+y, y^2x^3, -z^4y^2)$, $a = (-2,0,1)$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (\sin(x), -z\cos(y), x+y+z)$, $a = (\pi,0,0)$.
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(r,\theta,\phi) = (r\cos\theta\cos\phi, r\sin\theta\cos\phi, r\sin\phi)$, $x_0 = (r,\theta,\phi)$.

**Correction.**

1. Les dérivées partielles de $f = (f_1,f_2,f_3,f_4)$ sont
$$\begin{array}{lll}
\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) = 1, & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) = -1, & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) = 0 \\
\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) = 0, & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) = 1, & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) = 1 \\
\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2y^2, & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) = 2yx^3, & \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) = 0 \\
\frac{\partial f_4}{\partial x}(x,y,z) = 0, & \frac{\partial f_4}{\partial y}(x,y,z) = -2yz^4, & \frac{\partial f_4}{\partial z}(x,y,z) = -4z^3y^2,
\end{array}$$
et donc, au point $a$, on a
$$\begin{array}{lll}
\frac{\partial f_1}{\partial x}(-2,0,1) = 1, & \frac{\partial f_1}{\partial y}(-2,0,1) = -1, & \frac{\partial f_1}{\partial z}(-2,0,1) = 0 \\
\frac{\partial f_2}{\partial x}(-2,0,1) = 0, & \frac{\partial f_2}{\partial y}(-2,0,1) = 1, & \frac{\partial f_2}{\partial z}(-2,0,1) = 1 \\
\frac{\partial f_3}{\partial x}(-2,0,1) = 0, & \frac{\partial f_3}{\partial y}(-2,0,1) = 0, & \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) = 0 \\
\frac{\partial f_4}{\partial x}(-2,0,1) = 0, & \frac{\partial f_4}{\partial y}(-2,0,1) = 0, & \frac{\partial f_4}{\partial z}(-2,0,1) = 0,
\end{array}$$
et ainsi
$$J_f(-2,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ce qui permet de calculer, pour tout $(h,k,\ell) \in \mathbb{R}^3$,
$$D_{(-2,0,1)}f(h,k,\ell) = J_f(-2,0,1)\begin{pmatrix} h \\ k \\ \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \\ \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h-k \\ k+\ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Les dérivées partielles de $f = (f_1, f_2, f_3)$ sont :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) = \cos(x), \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) = 0$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) = z\sin(y), \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) = -\cos(y)$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) = 1, \quad \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) = 1, \quad \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) = 1,$$

et donc, au point $a$, on a

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(\pi,0,0) = -1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(\pi,0,0) = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(\pi,0,0) = 0$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(\pi,0,0) = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(\pi,0,0) = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}(\pi,0,0) = -1$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) = 1, \quad \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) = 1, \quad \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) = 1,$$

ce qui donne

$$J_f(\pi,0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le jacobien de $f$ au point $a$ vaut donc $\det(J_f(\pi,0,0)) = -1$ et la différentielle de $f$ en ce point est :

$$D_{(\pi,0,0)}f(h,k,\ell) = J_f(\pi,0,0)\begin{pmatrix} h \\ k \\ \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \\ \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h \\ -\ell \\ h+k+\ell \end{pmatrix}.$$

3. Les dérivées partielles de $f = (f_1, f_2, f_3)$ en $a$ sont :

$$\frac{\partial f_1}{\partial r}(r,\theta,\phi) = \cos\theta\cos\phi, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \theta}(r,\theta,\phi) = -r\sin\theta\cos\phi, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \phi}(r,\theta,\phi) = -r\cos\theta\sin\phi$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial r}(r,\theta,\phi) = \sin\theta\cos\phi, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \theta}(r,\theta,\phi) = r\cos\theta\cos\phi, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \phi}(r,\theta,\phi) = -r\sin\theta\sin\phi$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial r}(r,\theta,\phi) = \sin\phi, \quad \frac{\partial f_3}{\partial \theta}(r,\theta,\phi) = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial \phi}(r,\theta,\phi) = r\cos\phi,$$

et donc la jacobienne en $a$ est

$$J_f(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\cos\phi & -r\cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\phi & 0 & r\cos\phi \end{pmatrix}.$$

Le jacobien de $f$ est donc $\det(J_f(r,\theta,\phi)) = r^2\cos\phi$ et la différentielle est donnée par

$$D_{(r,\theta,\phi)}f(h,k,\ell) = J_f(r,\theta,\phi)\begin{pmatrix} h \\ k \\ \ell \end{pmatrix}.$$