Feuille 3 : Limites et fonctions continues

Exercice 1. Domaine de définition de fonctions
Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes et en donner une allure dans un plan ou dans l'espace :

1. $f(x,y) = \dfrac{\ln(x^2+y^2-1)}{xe^{x+y}}$
2. $g(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{z}}{x-y}$

Correction.

1. Comme, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $e^{x+y} > 0$, l'ensemble de définition de f est
$$D_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1, x \neq 0\},$$
c'est-à-dire sur l'ensemble de tous les points du plan strictement extérieur au disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1, privé de l'axe des ordonnées.
2. La quantité $g(x,y,z)$ existe si et seulement si $z \geq 0$ et $x - y \neq 0$, donc l'ensemble de définition de g est
$$D_g := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq y \text{ et } z \geq 0\},$$
c'est-à-dire tous les points du plan de cote positive n'appartenant pas au plan d'équation $x = y$.

Exercice 2. Lignes de niveau
Soit $k \in \mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. On appelle ligne de niveau k de la fonction f sur $\mathcal{D}$ l'ensemble
$$L_k = \{(x,y) \in \mathcal{D} : f(x,y) = k\}.$$
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition $\mathcal{D}$ ainsi que les lignes de niveaux L_k pour les valeurs de k données :

1. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $k \in \{-1,0,2\}$.
2. $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$, $k \in \{-1,0\}$.
3. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{x+y^2}$, $k = -1$.

Correction.

1. Pour $k = -1$, il est clair que $L_{-1} = \emptyset$ puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\sqrt{x^2+y^2} \geq 0$.
Pour $k = 0$, on a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$f(x,y) = 0 \iff \|(x,y)\|_2 = 0 \iff x = y = 0.$$
Donc $L_0 = \{(0,0)\}$.
Enfin, pour $k = 2$, on a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$f(x,y) = 2 \iff x^2+y^2 = 4,$$
et L_2 est donc le cercle centré en 0 et de rayon 2.

2. On commence à remarquer que $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$. Pour $k=-1$, on a, pour tout $(x,y) \in D_f$,
$$f(x,y) = -1 \iff \frac{y}{x} = -1 \iff y = -x.$$
Ainsi, L_{-1} est l'ensemble des points de la droite $y=-x$ privé de l'origine $(0,0)$ (quand $x=0$). Pour $k=0$, on a, pour tout $(x,y) \in D_f$,
$$f(x,y) = 0 \iff \frac{y}{x} = 0 \iff y = 0.$$
L'ensemble L_0 est donc l'axe des abscisses privé du point $(0,0)$ (quand $x=0$).
3. On commence par remarquer que $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq -y^2\}$. Pour $k=-1$, on a, pour tout $(x,y) \in D_f$,
$$f(x,y) = -1 \iff \frac{x^2+y}{x+y^2} = -1 \iff x^2+x+y^2+y = 0 \iff (x+1/2)^2+(y+1/2)^2 = 1/2.$$
L'ensemble L_{-1} est donc l'ensemble des point du cercle centré en $(-1/2,-1/2)$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$ privé des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant
$$x^2+x+y^2+y = 0, \quad \text{et} \quad x = -y^2.$$
En substituant, on obtient donc que l'on doit nécessairement avoir $y^4-y^2+y^2+y=0$ c'est-à-dire $y^4+y=0$, donc $y(y^3+1)=0$ d'où $y=0$ et $y^3=-1$, ce qui veut dire que $y=-1$. Si $y=0$, alors $x=-0^2=0$ et si $y=-1$, $x=-(-1)^2=-1$.
Au final, cette ligne de niveau est l'ensemble des points du cercle centré en $(-1/2,-1/2)$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$ privé des points $(0,0)$ et $(-1,-1)$.

Exercice 3. Preuve fausse à corriger
Déterminer toutes les erreurs commises dans la preuve ci-dessous et la corriger.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *définie pour tout* $(x,y) \neq (0,0)$ *par* $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2)-\sin(y^2)}{x^2+y^2}$.
Montrons que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. *En effet, on a, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f(x,x) = 0$, *et comme* $(x,x) \to (0,0)$ *quand* $x \to 0$, *on a bien que* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.
Correction. Les erreurs sont les suivantes :
1. Pour calculer la limite, comme $(x,y) \neq (0,0)$, il faudrait calculer $f(x,x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ (et non pas $\mathbb{R}$).
2. Même s'il est vrai que $\lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,x) = 0$, on ne peut PAS en déduire que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$! Cette limite existe si on obtient la même valeur en tendant vers $(0,0)$ de toutes les façons possibles.

Ainsi, on peut montrer que f n'admet pas de limite en $(0,0)$. En effet, on a, pour tout $x \neq 0$,
$$f(x,0) = \frac{\sin(x^2)}{x^2} \to 1$$
quand $x \to 0$, en utilisant le fait que $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$. Ainsi, f tend vers 0 sur la diagonale $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ et vers 1 sur l'axe des abscisses $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ quand $(x,y) \to (0,0)$, et n'a donc pas de limite au point $(0,0)$.
Alternativement : On peut aussi calculer, pour tout $y \neq 0$,
$$f(0,y) = -\frac{\sin(y^2)}{y^2} \to -1$$
quand $y \to 0$, *pour la même raison que précédemment, ce qui donne encore une autre limite différente des deux autres calculées plus haut, le long de l'axe des ordonnées cette fois-ci.*

Exercice 4. Quelques limites

A. Expliquer pourquoi la recherche de la limite d'une fonction $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ en $a \in \overline{E}$ est équivalente à la recherche de la limite d'une certaine fonction (à expliciter) en $(0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$.

B. Déterminer la limite des fonctions suivantes en $(0, 0)$:

1. $f(x, y) = \dfrac{x^k - y^k}{x^2 + y^2}$, pour $k = 2$, puis $k = 3$.
2. $f(x, y) = xe^{\frac{x}{y}}$.
3. $f(x, y) = \left(\dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x}\sin(x), \dfrac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$.
4. $f(x, y) = \dfrac{x^\alpha y^\beta}{x^2 + y^2}$, $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
   On discutera l'existence de la limite en fonction des valeurs de (α, β).
5. $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x + y}$.
   Indication : On pourra choisir x *en fonction de* y *de manière à obtenir* $f(x, y) = y^\beta - y^\alpha$ *avec* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Pour $k = 2$, la limite n'existe pas. En effet, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x, 0) = \frac{x^2}{x^2} = 1,$$
$$\forall y \in \mathbb{R}^*, \quad f(0, y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$
On a donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x, 0) = 1 \neq -1 = \lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} f(0, y)$.
Pour $k = 3$, on majore de la façon suivante, pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$,
$$|f(x, y)| = \left|\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}\right| \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2} \leq \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}^3}{x^2 + y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2} \to 0$$
quand $(x, y) \to (0, 0)$. Donc, par comparaison $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.
2. La limite n'existe pas. En effet, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x, x) = ex \quad \text{et} \quad f(x, x^2) = xe^{\frac{1}{x}}.$$
Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} f(x, x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x, x^2) = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ (par croissances comparées après avoir posé $X = 1/x$).
3. On note $f = (f_1, f_2)$. Pour f_1, on sait que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 + y^2 - 1 = -1$ et que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, ce qui implique que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x, y) = -1$.
Pour f_2, on a, pour tout $x \neq 0$ et tout $y \neq 0$,
$$\begin{aligned}|f_2(x, y)| \leq \frac{|\sin(x^2)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{|\sin(y^2)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{|\sin(x^2)|}{x^2} \times \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{|\sin(y^2)|}{x^2} \times \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\\ &\leq \frac{|\sin(x^2)|}{x^2} \times \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{|\sin(y^2)|}{x^2} \times \frac{y^2 + x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\\ &\leq \frac{|\sin(x^2)|}{x^2}\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{|\sin(y^2)|}{y^2}\sqrt{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$
Comme $\lim_{z\to 0} \frac{\sin(z^2)}{z^2} = 1$ et que $\lim\limits_{(x,y)\to 0} \sqrt{x^2 + y^2}$, on obtient que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x, y) = 0$ le long de toute courbe telle que $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Si $x = 0$, alors
$$\forall y \neq 0, \quad f(0, y) = \frac{\sin(y^2)}{|y|} = \frac{\sin(y^2)}{y^2}|y| \to 0$$

quand $y \to 0$. Symétriquement, si $y = 0$, on trouve aussi que $f(x, 0) \to 0$ quand $x \to 0$ et on a donc montré que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x, y) = 0$.
Ainsi, on a montré que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = (-1, 0).$$

4. Deux méthodes différentes sont possibles.
Méthode 1 : en coordonnées polaires. On passe en coordonnées polaires. Soit $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, alors on a

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^\alpha \cos^\alpha\theta r^\beta \sin^\beta\theta}{r^2} = r^{\alpha+\beta-2}\cos^\alpha\theta\sin^\beta\theta.$$

Si $\alpha+\beta > 2$, alors on a $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq r^{\alpha+\beta-2} \to 0$ quand $r \to 0$, et donc, par comparaison, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.
Si $\alpha + \beta = 0$, alors on a $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos^\alpha\theta\sin^\beta\theta$ qui est non-constant par rapport à θ, valant 0 si $\theta = 0$ et $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\alpha+\beta} \neq 0$ si $\theta = \frac{\pi}{4}$, et donc f n'a pas de limite en $(0, 0)$.
Si $\alpha + \beta < 2$, alors on a $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \dfrac{\cos^\alpha\theta\sin^\beta\theta}{r^{2-\alpha-\beta}}$ et donc $\lim\limits_{r\to0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ vaut 0 si $\theta = 0$ et $+\infty$ si $\theta = \frac{\pi}{4}$, et ainsi f n'a pas de limite en $(0, 0)$.
Méthode 2 : en coordonnées cartésiennes. Pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$|f(x, y)| = \frac{|x|^\alpha|y|^\beta}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}(x^2 + y^2)^{\frac{\beta}{2}}}{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1}.$$

Ainsi, si $\frac{\alpha+\beta}{2} - 1 > 0$, c'est-à-dire $\alpha + \beta > 2$, on a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1} = 0$ et donc, par comparaison, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.
Si $\alpha + \beta \leq 2$, alors

$$\forall x \neq 0, \quad f(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x, x) = \frac{1}{2x^{2-\alpha-\beta}}.$$

Comme $(x, x) \to (0, 0)$ quand $x \to 0$, et $\lim\limits_{x\to0} f(x, x) \neq 0$, puisqu'elle vaut soit $1/2$ (si $\alpha + \beta = 2$), soit $+\infty$ (si $\alpha + \beta < 2$ et $x \to 0^+$) on en déduit que f n'a pas de limite en $(0, 0)$

5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, alors

$$f(y^\alpha - y, y) = \frac{(y^\alpha - y)y^2}{y^\alpha - y + y} = \frac{y^{\alpha+2} - y^3}{y^\alpha} = y^2 - y^{3-\alpha}.$$

Comme α est arbitraire, on peut le choisir :
- tel que $3 - \alpha > 0$, et dans ce cas $\lim_{y\to0} f(y^\alpha - y, y) = 0$;
- tel que $3 - \alpha < 0$, et dans ce cas $\lim_{y\to0^+} f(y^\alpha - y, y) = -\infty$.

Ainsi, la limite de f en $(0, 0)$ n'existe pas.

Exercice 5. Continuité
Etudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

2. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

3. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

4. $f(x,y) = \begin{cases} xy\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
5. $f(x,y) = \begin{cases} 2x^2+y^2-1 & \text{si } x^2+y^2 > 1 \\ x^2 & \text{si } x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$

Correction.

1. Sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, f est continue comme quotient de fonctions continues dont le numérateur ne s'annule jamais car, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\sqrt{x^2+y^2+1}-1 = 0 \iff x^2+y^2 = 0 \iff (x,y) = (0,0).$$
Etudions la continuité en $(0,0)$. Pour cela, on utilise les coordonnées polaires $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r > 0, \theta \in [0,2\pi[$ et on trouve, quand $r \to 0$,
$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}-1} = \frac{r^2}{1+\frac{r^2}{2}+o(r^2)-1} \to 2$$
On a donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 2 = f(0,0)$, et ainsi f est continue en $(0,0)$, et donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, f est continue comme quotient de fonctions continues dont le numérateur ne s'annule jamais car, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$x^2+y^2 = 0 \iff (x,y) = (0,0).$$
Etudions la continuité en $(0,0)$. L'inégalité $2|xy| \leq x^2+y^2$ est évidente pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ car découlant du fait que $(|x|-|y|)^2 \geq 0$. Elle s'écrit aussi
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |xy| \leq \frac{\|(x,y)\|_2^2}{2}.$$
On rappelle que l'on a aussi, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 \leq x^2+y^2 = \|(x,y)\|_2^2$. On obtient donc, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$,
$$|f(x,y)| = \frac{|3x^2+xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{3x^2+|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{3\|(x,y)\|_2^2+\frac{1}{2}\|(x,y)\|_2^2}{\|(x,y)\|_2} = 3\|(x,y)\|_2+\frac{1}{2}\|(x,y)\|_2 \leq 4\|(x,y)\|_2.$$
Comme la limite de $\|(x,y)\|_2$ en $(0,0)$ est 0, on en déduit que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$ et donc f est continue en $(0,0)$, ce qui implique que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
Alternativement : en coordonnées polaires, soit $r > 0$ et $\theta \in [0,2\pi[$, alors
$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = \frac{|3r^2\cos^2\theta + r^2\cos\theta\sin\theta|}{r} = |3r\cos^2\theta + r\cos\theta\sin\theta| \leq 4r \to 0$$
quand $r \to 0$, donc, par comparaison, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ d'où la continuité en $(0,0)$.
3. Sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, f est continue comme quotient de fonctions continues dont le numérateur ne s'annule jamais.
Etudions la continuité en $(0,0)$. Pour tout $x \neq 0$, on a
$$f(x,x) = \frac{e^{x^2}-1}{2x^2}, \quad \text{et} \quad f(-x,x) = \frac{e^{-x^2}-1}{2x^2}.$$
On sait que quand $t \to 0$, on a $e^t = 1+t+o(t)$, et on trouve donc
$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} f(-x,x) = -\frac{1}{2},$$
ce qui prouve que f n'admet pas de limite en $(0,0)$ et donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

4. Sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, f est continue comme produit et composée de fonctions continues car, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$x^2+y^2 \leq 0 \iff x^2+y^2=0 \iff (x,y)=(0,0).$$
Etudions la continuité en $(0,0)$. On utilise encore le fait que, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|x| \leq \|(x,y)\|_2$ et $|y| \leq \|(x,y)\|_2$. On trouve ainsi, pour tout $(x,y)\neq(0,0)$,
$$|f(x,y)| \leq |xy| |\ln(\|(x,y)\|_2^2) = \|(x,y)\|^2 \ln(\|(x,y)\|_2^2)$$
Comme $\lim\limits_{X\to 0^+} X\ln X = 0$, on trouve que $f(x,y)$ tend vers $0 = f(0,0)$ quand $(x,y)\to(0,0)$, ce qui prouve que f est continue en $(0,0)$, et donc sur $\mathbb{R}^2$.
5. Sur $B(0,1)$, f est continue car c'est un polynôme en les variables x et y. Sur $\overline{B}(0,1)^c$, f est aussi continue pour la même raison.
Soit (x_0,y_0) tel que $x_0^2+y_0^2=1$. Montrons que f est continue en (x_0,y_0). Soit $\{(x_k,y_k)\}_k$ une suite qui converge vers (x_0,y_0). Soit $k\in\mathbb{N}$, alors :
   - Si $(x_k,y_k)\in B(0,1)$, alors $f(x_k,y_k)=x_k^2$ et $f(x_k,y_k)\to x_0^2=f(x_0,y_0)$ quand $k\to+\infty$.
   - Si $(x_k,y_k)\in B(0,1)^c$, alors $f(x_k,y_k)=2x_k^2+y_k^2-1 \to 2x_0^2+y_0^2-1 = 2x_0^2+1-x_0^2-1 = x_0^2 = f(x_0,y_0)$.

   Ainsi, il est clair que la fonction f est continue en (x_0,y_0), et donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6. Fonction sur un cercle
Soit $\mathcal{C}$ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ et $f:\mathcal{C}\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x_0\in\mathcal{C}$ tel que $f(-x_0)=f(x_0)$.
Indication : On considérera la fonction $g:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, $t\mapsto g(t)=f(\cos t,\sin t)-f(-\cos t,-\sin t)$.
Correction. La fonction g est continue comme composée de fonctions continues car f, $t\mapsto(\cos t,\sin t)$ et $t\mapsto(-\cos t,-\sin t)$ sont continues. On remarque que
$$g(0)=f(1,0)-f(-1,0) \quad \text{et} \quad g(\pi)=f(-1,0)-f(1,0)=-g(0).$$
Ainsi, $g(0)$ et $g(\pi)$ sont de signes opposés, et comme g est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0\in[0,\pi]$ tel que $g(t_0)=0$, ce qui veut dire que, pour $x_0=(\cos t_0,\sin t_0)$, on a $f(-x_0)=f(x_0)$.

Exercice 7. Fonctions höldériennes et continuité uniforme
Soit $\alpha>0$ et $E\subset\mathbb{R}^n$. On dit que $F:E\to\mathbb{R}^p$ est α-höldérienne s'il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $(x,y)\in E^2$, $\|F(x)-F(y)\|_2 \leq C\|x-y\|_2^\alpha$.
1. Montrer que, pour tout $\alpha>0$, toute fonction α-höldérienne est uniformément continue.
2. En déduire que la fonction $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $x\mapsto\sqrt{x}$ est uniformément continue.
3. Montrer que si $F:E\to\mathbb{R}$ et $G:E\to\mathbb{R}$ sont bornées et α-höldériennes, alors $FG:E\to\mathbb{R}$ est bornée et α-höldérienne.
Indication : $\forall(x,y)\in E^2$, $F(x)G(x)-F(y)G(y)=F(x)(G(x)-G(y))+G(y)(F(x)-F(y))$.

Correction.
1. Soit $\alpha>0$ et F une fonction α-höldérienne. Soit $\varepsilon>0$, alors il existe $\delta=\left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ de telle sorte que
$$\forall(x,y)\in E^2, \quad \|x-y\|_2<\delta \Longrightarrow \|F(x)-F(y)\|_2 \leq C\|x-y\|_2^\alpha < C\delta^\alpha=\varepsilon,$$
donc F est bien uniformément continue.
2. Soit $x\geq 0$ et $y\geq 0$ tels que $0\leq x\leq y$, alors on a, en appliquant g et en multipliant par $\sqrt{x}$, $x\leq\sqrt{x}\sqrt{y}$, ce qui nous donne $-2\sqrt{x}\sqrt{y}\leq -2x$, puis, en ajoutant $x+y$, on finit par obtenir
$$x+y-2\sqrt{x}\sqrt{y}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \leq x+y-2x=y-x=|x-y|.$$
L'inégalité $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\leq|x-y|$ restant la même en échangeant les rôles de x et y, on a donc obtenu :
$$\forall x\geq 0, \forall y\geq 0, \quad |\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq |x-y|^{\frac{1}{2}},$$
donc g est 1/2-höldérienne, donc uniformément continue d'après la question précédente.

3. Soient F et G bornées et α-höldérienne, alors on a, comme F et G sont bornées,

$$\exists M > 0, \exists N > 0, \forall x \in E, |F(x)| \leq M, |G(x)| \leq N,$$

et ainsi

$$\forall x \in E, |F(x)G(x)| \leq MN.$$

On en déduit donc que FG est bornée. De plus, on a, pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\begin{aligned} |F(x)G(x) - F(y)G(y)| &= |F(x)(G(x) - G(y)) + G(y)(F(x) - F(y))| \\ &\leq |F(x)||G(x) - G(y)| + |G(y)||F(x) - F(y)| \\ &\leq MC_1 \|x - y\|_2^\alpha + NC_2 \|x - y\|_2^\alpha \\ &\leq (MC_1 + NC_2)\|x - y\|_2^\alpha \end{aligned}$$

où on a noté M et C_1 (resp. N et C_2) le majorant de $|F|$ (resp. de $|G|$) et la constante associée à F (resp. G) dans la condition de Hölder. Comme toutes ces constantes sont strictement positives$MC_1 + NC_2 > 0$ et on a donc montré que FG est α-höldérienne.

Exercice 8. Application coercive et minimum global

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un fermé non-borné et soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{\|x\|_2 \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum global sur E, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) \geq f(x_0)$.

Correction. Soit $a \in E$. On sait qu'il existe $R > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_2 > R \Rightarrow f(x) > f(a).$$

Par ailleurs, pour ce réel R, $\overline{B}(O, R) \cap E$ est un fermé borné car E est fermé et $\overline{B}(O, R)$ est fermé et borné, donc $\overline{B}(O, R) \cap E$ est un compact non-vide. Ainsi, comme f est continue, f restreint au compact $\overline{B}(O, R) \cap E$ admet un minimum global en un certain x_0, qui est donc atteint, d'après le théorème des bornes atteintes de Weierstrass.

Exercice 9. Point fixe sur un compact

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ une partie compacte et $f : K \to K$ une fonction continue vérifiant

$$\forall (x, y) \in K^2, \quad x \neq y \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\|_2 < \|x - y\|_2.$$

1. Montrer que f admet une unique point fixe, c'est-à-dire : $\exists! \alpha \in K, f(\alpha) = \alpha$.
   Indication : pour montrer l'existence de α, considérer le minimum de la fonction $g : K \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f(x) - x\|_2$ et raisonner par l'absurde.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x + \frac{1}{x+1} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

   Montrer que f n'admet pas de point fixe, et que donc le résultat précédent ne se généralise pas à K fermé.

Correction.

1. Soit $g : K \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f(x) - x\|_2$. alors cette fonction est continue (comme composée de fonctions continues) sur le compact K, elle y atteint donc son minimum $g(\alpha)$ en un point que l'on note $\alpha \in K$. Supposons que $\alpha \neq f(\alpha)$, c'est-à-dire que le minimum de g n'est pas 0. Alors on a

$$g(f(\alpha)) = \|f(f(\alpha)) - f(\alpha)\|_2 < \|\alpha - f(\alpha)\|_2 = g(\alpha),$$

   ce qui contredit la minimalité de $g(\alpha)$. On en déduit que $\alpha = f(\alpha)$. Pour montrer l'unicité d'un tel α, supposons qu'il existe aussi $\beta \in K$ vérifiant la même prioriété, alors

$$\|\beta - \alpha\|_2 = \|f(\beta) - f(\alpha)\|_2 < \|\beta - \alpha\|_2,$$

   ce qui est impossible.

2. On a que f est continue puisque :
   - elle l'est sur $\mathbb{R}^*$ car $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x + \frac{1}{1+x}$ sont continues ;
   - en 0, on a $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(1)$,

   mais elle n'admet aucun point fixe car, pour tout $x \in \mathbb{R}_-$,
$$x = f(x) \iff 0 \geq x = 1,$$
   ce qui est impossible, et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$x = f(x) \iff \frac{1}{1+x} = 0,$$
   ce qui est aussi impossible.
   De plus, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \neq y$, alors on a trois cas :
   (a) Si $x \leq 0$ et $y \leq 0$, alors
$$|f(x) - f(y)| = |1 - 1| = 0 < |x - y|,$$
   (b) si $x \leq 0$ et $y > 0$, alors $y > x$ et $\frac{y}{1+y} > 0$, donc
$$|f(x) - f(y)| = \left|1 - y - \frac{1}{1+y}\right| = \frac{y^2}{1+y} = y - \frac{y}{1+y} < y \leq y - x = |y - x|$$
   (c) si $x > 0$ et $y > 0$, alors, comme $\dfrac{1}{(1+x)(1+y)} < 1$,
$$|f(x)-f(y)| = \left|x + \frac{1}{x+1} - y - \frac{1}{y+1}\right| = \left|x - y + \frac{y-x}{(1+x)(1+y)}\right| = |x-y| \left(1 - \frac{1}{(1+x)(1+y)}\right) < |x-y|.$$
   On a donc montré que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|$, mais que f n'admet pas de point fixe. Le résultat de cet exercice ne se généralise donc pas à tout fermé K (ici $\mathbb{R}$ est fermé).