Université Claude Bernard Lyon 1 UE Analyse 4

L2, Semestre de Printemps 2024-2025

Feuille 3 : Limites et fonctions continues

Objectifs	**OUI**	**NON**
Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction		
Déterminer les lignes de niveau d'une fonction		
Manipuler la définition de (d'uniforme) continuité d'une fonction		
Déterminer la limite d'une fonction en un point		
Montrer la continuité d'une fonction en un point (inégalités)		
Montrer la discontinuité d'une fonction en un point en utilisant des suites/courbes		
Utiliser le théorème de la borne atteinte		

Exercice 1. Domaine de définition de fonctions
Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes et en donner une allure dans un plan ou dans l'espace :

1. $f(x,y) = \dfrac{\ln(x^2+y^2-1)}{xe^{x+y}}$
2. $g(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{z}}{x-y}$

Exercice 2. Lignes de niveau
Soit $k \in \mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. On appelle ligne de niveau k de la fonction f sur $\mathcal{D}$ l'ensemble

$$L_k = \{(x,y) \in \mathcal{D} : f(x,y) = k\}.$$

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition $\mathcal{D}$ ainsi que les lignes de niveaux L_k pour les valeurs de k données :

1. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $k \in \{-1,0,2\}$.
2. $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$, $k \in \{-1,0\}$.
3. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{x+y^2}$, $k = -1$.

Exercice 3. Preuve fausse à corriger
Déterminer toutes les erreurs commises dans la preuve ci-dessous et la corriger.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *définie pour tout* $(x,y) \neq (0,0)$ *par* $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2)-\sin(y^2)}{x^2+y^2}$.
Montrons que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. *En effet, on a, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f(x,x) = 0$, *et comme* $(x,x) \to (0,0)$ *quand* $x \to 0$, *on a bien que* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Exercice 4. Quelques limites
A. Expliquer pourquoi la recherche de la limite d'une fonction $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ en $a \in \overline{E}$ est équivalente à la recherche de la limite d'une certaine fonction (à expliciter) en $(0,...,0) \in \mathbb{R}^n$.
B. Déterminer la limite des fonctions suivantes en $(0,0)$:

1. $f(x,y) = \dfrac{x^k - y^k}{x^2+y^2}$, pour $k=2$, puis $k=3$.

2. $f(x,y) = xe^{\frac{x}{y}}$.
3. $f(x,y) = \left(\dfrac{x^2+y^2-1}{x} \sin(x), \dfrac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$.
4. $f(x,y) = \dfrac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2}$, $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
   On discutera l'existence de la limite en fonction des valeurs de (α,β).
5. $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x+y}$.
   Indication : On pourra choisir x *en fonction de* y *de manière à obtenir* $f(x,y) = y^\beta - y^\alpha$ *avec* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Continuité

Etudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy}-1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
4. $f(x,y) = \begin{cases} xy\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
5. $f(x,y) = \begin{cases} 2x^2+y^2-1 & \text{si } x^2+y^2 > 1 \\ x^2 & \text{si } x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$

Exercice 6. Fonction sur un cercle

Soit $\mathcal{C}$ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathcal{C}$ tel que $f(-x_0) = f(x_0)$.
Indication : On considérera la fonction $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto g(t) = f(\cos t, \sin t) - f(-\cos t, -\sin t)$.

Exercice 7. Fonctions höldériennes et continuité uniforme

Soit $\alpha > 0$ et $E \subset \mathbb{R}^n$. On dit que $F : E \to \mathbb{R}^p$ est α-höldérienne s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x,y) \in E^2$, $\|F(x) - F(y)\|_2 \leq C\|x-y\|_2^\alpha$.

1. Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, toute fonction α-höldérienne est uniformément continue.
2. En déduire que la fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue.
3. Montrer que si $F : E \to \mathbb{R}$ et $G : E \to \mathbb{R}$ sont bornées et α-höldériennes, alors $FG : E \to \mathbb{R}$ est bornée et α-höldérienne.
   Indication : $\forall (x,y) \in E^2$, $F(x)G(x) - F(y)G(y) = F(x)(G(x) - G(y)) + G(y)(F(x) - F(y))$.

Exercice 8. Application coercive et minimum global

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un fermé non-borné et soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{\|x\|_2 \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum global sur E, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) \geq f(x_0)$.

Exercice 9. Point fixe sur un compact
Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ une partie compacte et $f : K \to K$ une fonction continue vérifiant

$$\forall (x,y) \in K^2, \quad x \neq y \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\|_2 < \|x - y\|_2.$$

1. Montrer que f admet une unique point fixe, c'est-à-dire : $\exists! \alpha \in K, f(\alpha) = \alpha$.
   Indication : pour montrer l'existence de α, considérer le minimum de la fonction $g : K \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f(x) - x\|_2$ et raisonner par l'absurde.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
   $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x + \frac{1}{x+1} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$
   Montrer que f n'admet pas de point fixe, et que donc le résultat précédent ne se généralise pas à K fermé.