

Feuille 1 : Normes sur $\mathbb{R}^n$ et ensembles de points

CORRECTION

Exercice 1. Ensembles de points de $\mathbb{R}^2$

I. Donner une allure des ensembles suivants dans le plan.

1. $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y - 1 = 0\}$
2. $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2\}$
3. $A_3 = \{(x, x^3 - 4) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1]\}$
4. $A_4 = \{(\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 : t \in]0, 2\pi[\}$
5. $A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 = 3\}$
6. $A_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$
7. $A_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0 \text{ et } x > y\}$
8. $A_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 < x\}$
9. $A_9 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + 2| + |y - 1| \leq 1\}$
10. $A_{10} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y|) > 2\}$
11. $A_{11} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geq 1, x^2 + y^2 \leq 2\}$.

II. Donner l'expression du complémentaire de chacun des ensembles suivants : A_6 , A_7 , A_9 et A_{11} .

Correction.

I. On donne ici directement les réponses (les figures sont faites en TD, mais vous pouvez aussi utiliser Wolfram Alpha pour les tracer).

1. A_1 est la droite d'équation $y = x - 1$.
2. A_2 est la droite verticale d'équation $x = 2$.
3. A_3 est le graphe de la fonction $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - 4$.
4. A_4 est le cercle centré en $(0, 0)$ et de rayon 1, privé du point $(1, 0)$.
5. A_5 est le cercle centré en $(1, 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
6. A_6 est l'ensemble des points à la fois au-dessus du graphe de la fonction $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 1$ et en-dessous de celui de la fonction $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1 - x^2$.
7. A_7 est le demi-plan des points strictement au-dessus des droites d'équations $y = x$ (la diagonale principale) et $y = 0$ (l'axe des abscisses).
8. A_8 est l'intérieur strict de la parabole d'axe horizontale d'équation $x = y^2$.
9. A_9 est l'intérieur strict du carré (tourné de 45°) de centre $(-2, 1)$ et de diagonale de longueur 2.
10. A_{10} est l'extérieur strict du carré centré en $(0, 0)$ et de côté 2.
11. A_{11} est la "couronne" centrée en $(0, 0)$ délimitée par le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$ et le carré (tourné de 45°) de centre $(0, 0)$ et de diagonale de longueur 2.

II. Par passage au complémentaire, on a :

- $A_6^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2 - 1 \text{ ou } y > 1 - x^2\}$.
- $A_7^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0 \text{ ou } x \leq y\}$.
- $A_9^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + 2| + |y - 1| > 1\}$.
- $A_{11}^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1 \text{ ou } x^2 + y^2 > 2\}$.

Exercice 2. Ensembles bornés

On dit que $A \subset \mathbb{R}^n$ est borné si, $\exists (M_1, \dots, M_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in A$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $|x_i| \leq M_i$ (une définition équivalente sera donnée en CM).

Montrer que les ensembles suivants sont bornés.

1. $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : 3\sqrt{\frac{1}{|x-2|+1}} > 1 \right\}$
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 1\}$
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x(1-2x)\}$
4. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e^{x^2+y^2+z^2+1} + \sin(xyz) \leq 4\}$

Correction.

1. Soit $x \in A$, alors on a, puisque les quantités considérées sont positives,

$$3\sqrt{\frac{1}{|x-2|+1}} > 1 \iff \sqrt{\frac{1}{|x-2|+1}} > \frac{1}{3} \iff \frac{1}{|x-2|+1} > \frac{1}{9} \iff |x-2| < 8 \iff -6 < x < 10,$$

donc en particulier $|x| \leq 10$ et A est borné.

Remarque : le dernier argument ($|x| \leq 10$) n'est pas nécessaire puisque l'on a déjà $-6 < x < 10$.

2. Soit $(x, y) \in B$, alors on a :

- d'une part, $4x^2 \leq 4x^2 + y^2 \leq 1$, et donc $x^2 \leq \frac{1}{4}$ ce qui veut dire que $|x| \leq \frac{1}{2}$;
- d'autre part, $y^2 \leq 4x^2 + y^2 \leq 1$, et donc $y^2 \leq 1$ ce qui veut dire que $|y| \leq 1$,

et ainsi B est borné.

3. Soit $(x, y) \in C$, alors $y^2 = x(1-2x)$. Comme $y^2 \geq 0$, on en déduit que $x(1-2x) \geq 0$. Puisque $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x(1-2x) = -2x^2 + x$ est une fonction polynomiale du second degré, de coefficient dominant $-2 < 0$ et s'annulant en 0 et $\frac{1}{2}$, on en déduit que nécessairement $x \in [0, 1/2]$. Comme P est continue, elle atteint ses bornes sur $[0, 1/2]$ et donc y^2 est borné, ce qui veut dire que $|y|$ l'est aussi. On en déduit donc que C est borné.

4. Soit $(x, y, z) \in D$, alors on a

$$e^{x^2+y^2+z^2+1} - 1 \leq e^{x^2+y^2+z^2+1} + \sin(xyz) \leq 4,$$

ce qui implique que $e^{x^2+y^2+z^2+1} \leq 5$ et donc que $x^2 + y^2 + z^2 + 1 \leq \ln(5)$, c'est-à-dire

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq \ln(5) - 1.$$

Ainsi, comme $5 > e$, on a $\ln(5) - 1 > 0$, et en raisonnant comme au point 2., on obtient que $|x| \leq \sqrt{\ln(5) - 1}$, $|y| \leq \sqrt{\ln(5) - 1}$ et $|z| \leq \sqrt{\ln(5) - 1}$, et donc D est borné.

Remarque : on peut aussi dire que D est inclus dans la boule centrée en $(0, 0, 0)$ et de rayon $\sqrt{\ln(5) - 1}$, et donc D est borné.

Exercice 3. Inclusion et non-inclusion d'ensembles

1. Soient $a < b$ deux réels.
 - a) Montrer que $]a, b[= \left\{ y \in \mathbb{R} : \left| y - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2} \right\}$.
 - b) Soit $x \in]a, b[$ et $\delta = \frac{b-a}{2} - \left| x - \frac{a+b}{2} \right|$. Montrer que $]x - \delta, x + \delta[\subset]a, b[$.
2. Soient $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3\}$ et $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 \leq 9\}$. Montrer que $B \subset E$.
3. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$.
 - a) Préciser la nature de l'ensemble A et le tracer dans le plan.
 - b) Montrer que $(-1, 3) \in A$ (un dessin ne suffit pas!).
 - c) Pour tout $r > 0$, on définit l'ensemble $B_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + (y-3)^2 < r^2\}$.
Pour tout $r > 0$, préciser la nature de B_r et montrer que $B_r \not\subset A$.

Correction.

1. a) On a, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\left| y - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2} \iff \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} < y < \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \iff a < y < b \iff y \in]a, b[,$$

d'où l'égalité voulue.

- b) Soit $y \in]x - \delta, x + \delta[$, alors on a $|y - x| < \delta$ et donc

$$\left| y - \frac{a+b}{2} \right| = \left| y - x + x - \frac{a+b}{2} \right| \leq |y - x| + \left| x - \frac{a+b}{2} \right| < \delta + \left| x - \frac{a+b}{2} \right| = \frac{b-a}{2},$$

ce qui implique, d'après la question a), que $y \in]a, b[$. Donc $]x - \delta, x + \delta[\subset]a, b[$.

2. Soit $(x, y) \in B$, alors on a

$$2x^2 + 3y^2 \leq 3x^2 + 3y^2 = 3(x^2 + y^2) \leq 3 \times 3 = 9,$$

donc $(x, y) \in E$, et ainsi $B \subset E$.

3. a) A est le disque de centre $(-1, 2)$ et de rayon 1.
 b) On a $(-1+1)^2 + (3-2)^2 = 1 \leq 1$, donc $(-1, 3) \in A$.
 c) Quelque soit $r > 0$, B_r est le disque ouvert (appelée aussi boule ouverte) de centre $(-1, 3)$ et de rayon r . Pour tout $r > 0$, on a :
- $(-1, 3 + \frac{r}{2}) \in B_r$ car $(-1+1)^2 + (3 + \frac{r}{2} - 3)^2 = \frac{r^2}{4} < r^2$;
 - $(-1, 3 + \frac{r}{2}) \notin A$ puisque $(-1+1)^2 + (3 + \frac{r}{2} - 2)^2 = (1 + \frac{r}{2})^2 > 1$, donc $B_r \not\subset A$.

Exercice 4. Inégalité de Cauchy-Schwarz et applications

Le but de cet exercice est de démontrer l'inégalité suivante, appelée inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

1. Montrer cette inégalité si $x = (0, \dots, 0)$ ou $y = (0, \dots, 0)$.
 2. Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \neq (0, \dots, 0)$ et $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t) = \sum_{i=1}^n (x_i + t y_i)^2.$$

- a) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = at^2 + bt + c$.
 b) En considérant le signe de P sur $\mathbb{R}$, démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3. Montrer que $\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$ si et seulement si x et y sont liés.

4. **Applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.** Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

- a) Démontrer que $\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$ et étudier le cas d'égalité.

- b) On suppose en outre que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $x_k > 0$, et que $\sum_{k=1}^n x_k = 1$. Démontrer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$$

et étudier le cas d'égalité.

Correction.

1. Si x ou y est nul, alors il est clair que chaque membre de l'inégalité à démontrer est nul, donc l'inégalité est vraie.
2. a) Pour tout $t > 0$, on a

$$P(t) = \sum_{i=1}^n (x_i + ty_i)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + t^2 y_i^2 + 2tx_i y_i) = \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) t^2 + \left(2 \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) t + \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

d'où $a = \sum_{i=1}^n y_i^2$, $b = 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i$ et $c = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

- b) P étant une fonction polynomiale de degré 2 (comme $a \neq 0$ puisque x et y sont non-nuls), on calcule son discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(2 \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) = 4 \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \right].$$

Comme $P \geq 0$ et que son coefficient dominant a est strictement positif, alors on doit nécessairement avoir $\Delta < 0$, c'est-à-dire

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) < 0$$

que l'on écrit donc, puisque les termes sont tous positifs,

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

qui est bien l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3. Si on a égalité dans l'inégalité précédente, alors c'est équivalent avec le fait que $\Delta = 0$, c'est-à-dire si et seulement si P admet une racine double t_0 vérifiant

$$P(t_0) = \sum_{i=1}^n (x_i + t_0 y_i)^2 = 0.$$

Comme P est une somme de termes positifs, cela est équivalent avec le fait que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad x_i + t_0 y_i = 0,$$

c'est-à-dire si et seulement si $x = -t_0 y$ et les vecteurs x et y sont liés.

4. a) Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n) = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. On trouve alors

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \|(x_1, \dots, x_n)\|_2 \|(1, \dots, 1)\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On élève au carré et on obtient

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

L'égalité est obtenue si et seulement si les vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n) = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ sont liés, c'est-à-dire si et seulement si tous les x_k sont égaux.

- b) On applique maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $z = (\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n})$ et $y = (1/\sqrt{x_1}, \dots, 1/\sqrt{x_n})$:

$$\begin{aligned} n = \sum_{k=1}^n z_k y_k &\leq \left(\sum_{k=1}^n z_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{x_k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{x_k}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

car $\sum_{k=1}^n x_k = 1$ et que $\forall k \in \{1, \dots, n\}, x_k > 0$. En élevant au carré, on obtient le résultat désiré.

On a égalité dans cette inégalité si et seulement si les vecteurs z et y sont liés, c'est-à-dire s'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\sqrt{x_k} = \frac{\lambda}{\sqrt{x_k}}$, autrement dit $x_k = \sqrt{\lambda}$ car toutes les quantités sont positives ici. On a donc égalité si et seulement si tous les x_k sont égaux. Mais comme $\sum_{k=1}^n x_k = 1$, on en déduit que $\forall k \in \{1, \dots, n\}, x_k = \frac{1}{n}$.

Exercice 5. Preuve fautive à corriger

Déterminer toutes les erreurs commises dans la preuve ci-dessous et la corriger.

Montrons que l'application $N : (x, y) \mapsto |5x + 3y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$. En effet, on a :

1. Si $(x, y) = (0, 0)$, alors $N(x, y) = N(0, 0) = 0$.
2. Soit $\lambda \geq 0$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $N(\lambda(x, y)) = N(\lambda x, \lambda y) = |5 \times \lambda x + 3 \times \lambda y| = \lambda N(x, y)$.
3. Soient $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$N(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = |5x_1 + 5x_2 + 3y_1 + 3y_2| \leq N(x_1, y_1) + N(x_2, y_2).$$

Correction. Les éléments faux sont les suivants :

- La positivité a été oubliée : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, N(x, y) \geq 0$.
- Le deuxième point devrait être vérifié pour $\lambda \in \mathbb{R}$, et on aurait ainsi $N(\lambda(x, y)) = |\lambda| N(x, y)$, ce qui est vrai ici.
- Le premier point ne permet de vérifier qu'une seule des implications de l'axiome de séparation ! En effet, $N(-3, 5) = |-15 + 15| = 0$ et donc on n'a pas $N(x, y) = 0 \Rightarrow x = y = 0$, et donc N n'est pas une norme !

Exercice 6. Norme sur $\mathbb{R}^2$

Montrer que l'application $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \|(x_1, x_2)\| := \max(|x_1 + 3x_2|, |x_1 - x_2|)$$

est une norme dont on tracera la boule unité fermée.

Correction. On a

1. Positivité : pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\|x\| \geq 0$.
2. Séparation : soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\|x\| = 0 \iff |x_1 + 3x_2| = |x_1 - x_2| = 0 \iff \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x_1 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases} \iff x = (0, 0).$$

3. Homogénéité : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\|\lambda x\| = \|(\lambda x_1, \lambda x_2)\| = \max(|\lambda x_1 + 3\lambda x_2|, |\lambda x_1 - \lambda x_2|) = \max(|\lambda| |x_1 + 3x_2|, |\lambda| |x_1 - x_2|).$$

On a donc bien

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \max(|x_1 + 3x_2|, |x_1 - x_2|) = |\lambda| \|x\|.$$

4. Inégalité triangulaire : soient $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\|x + y\| = \|(x_1 + y_1, x_2 + y_2)\| = \max(|x_1 + y_1 + 3x_2 + 3y_2|, |x_1 + y_1 - x_2 - y_2|).$$

Comme on a, par l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue,

$$\begin{aligned} |x_1 + y_1 + 3x_2 + 3y_2| &\leq |x_1 + 3x_2| + |y_1 + 3y_2| \leq \max(|x_1 + 3x_2|, |x_1 - x_2|) + \max(|y_1 + 3y_2|, |y_1 - y_2|) \\ |x_1 + y_1 - x_2 - y_2| &\leq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \leq \max(|x_1 + 3x_2|, |x_1 - x_2|) + \max(|y_1 + 3y_2|, |y_1 - y_2|), \end{aligned}$$

alors

$$\max(|x_1 + y_1 + 3x_2 + 3y_2|, |x_1 + y_1 - x_2 - y_2|) \leq \max(|x_1 + 3x_2|, |x_1 - x_2|) + \max(|y_1 + 3y_2|, |y_1 - y_2|),$$

c'est-à-dire $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Pour tracer $B_{\|\cdot\|}(0, 1)$, on remarque que, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\max(|x_1 + 3x_2|, |x_1 - x_2|) \leq 1 \iff |x_1 + 3x_2| \leq 1 \quad \text{et} \quad |x_1 - x_2| \leq 1.$$

On a 4 cas :

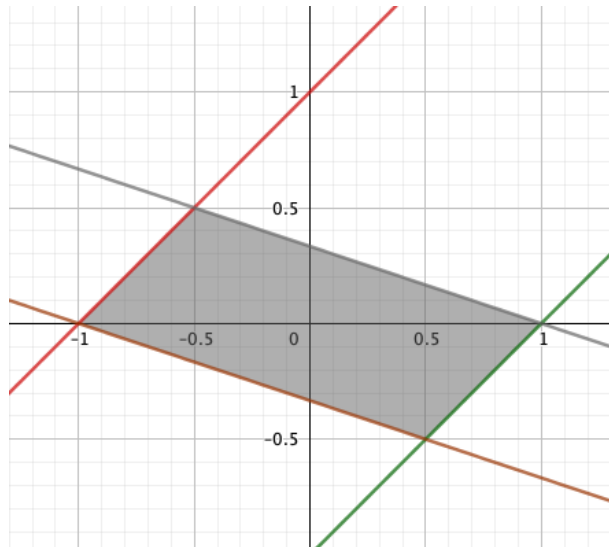
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \geq 0, x_1 - x_2 \geq 0 : |x_1 + 3x_2| \leq 1 \quad \text{et} \quad |x_1 - x_2| \leq 1 &\iff x_1 + 3x_2 \leq 1 \quad \text{et} \quad x_1 - x_2 \leq 1 \\ &\iff x_2 \leq -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 \geq x_1 - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \geq 0, x_1 - x_2 \leq 0 : |x_1 + 3x_2| \leq 1 \quad \text{et} \quad |x_1 - x_2| \leq 1 &\iff x_1 + 3x_2 \leq 1 \quad \text{et} \quad -x_1 + x_2 \leq 1 \\ &\iff x_2 \leq -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 \leq x_1 + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \leq 0, x_1 - x_2 \leq 0 : |x_1 + 3x_2| \leq 1 \quad \text{et} \quad |x_1 - x_2| \leq 1 &\iff -x_1 - 3x_2 \leq 1 \quad \text{et} \quad -x_1 + x_2 \leq 1 \\ &\iff x_2 \geq -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 \leq x_1 + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \leq 0, x_1 - x_2 \geq 0 : |x_1 + 3x_2| \leq 1 \quad \text{et} \quad |x_1 - x_2| \leq 1 &\iff -x_1 - 3x_2 \leq 1 \quad \text{et} \quad x_1 - x_2 \leq 1 \\ &\iff x_2 \geq -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 \geq x_1 - 1. \end{aligned}$$

On trace les droites d'équations $x_2 = -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}$ (marron), $x_2 = x_1 + 1$ (rouge), $x_2 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}$ (vert) et $x_2 = x_1 - 1$ (gris) et on obtient $\bar{B}_{\|\cdot\|}(0, 1)$ (gris foncé).



Exercice 7. Normes classiques équivalentes

On dit que deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, et on note $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$, s'il existe deux réels $m > 0$ et $M > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|.$$

On rappelle la définition des trois normes dites "classiques" sur $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|x\|_2 := \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Montrer que ces trois normes sont équivalentes deux-à-deux.

Correction. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

- $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| = \|x\|_1$;
- $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \leq \sum_{k=1}^n \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = n\|x\|_\infty$,

et ainsi $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$, c'est-à-dire $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_\infty$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a aussi

- $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = \max_{1 \leq k \leq n} \sqrt{x_k^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} = \|x\|_2$;
- $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (\max_{1 \leq k \leq n} |x_k|)^2} = \sqrt{n\|x\|_\infty^2} = \sqrt{n}\|x\|_\infty$,

et ainsi $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$, c'est-à-dire $\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_\infty$.

Par transitivité, on a $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ et donc ces trois normes sont équivalentes deux-à-deux.

Exercice 8. Norme plus "exotique"... ou pas !

Soit $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{\sqrt{1 + t^2}}$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$ (en vérifiant les propriétés d'une norme).
2. Dans cette question, on souhaite montrer qu'en fait N est la norme euclidienne.
 - a) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $N \leq \|\cdot\|_2$.
 - b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En considérant $t = \frac{y}{x}$ (si $x \neq 0$) et la limite de $\frac{|x + ty|}{\sqrt{1 + t^2}}$ quand $t \rightarrow +\infty$ (si $x = 0$), démontrer que $N(x, y) \geq \|(x, y)\|_2$ et conclure.

Correction.

1. On vérifie que N satisfait bien les axiomes d'une norme :

- Positivité : Comme $\frac{|x + ty|}{\sqrt{1 + t^2}} \geq 0$ pour tout $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$, alors en passant au supremum, $N(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- Séparation : Il est clair que $N(0, 0) = 0$. Réciproquement, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est tel que $N(x, y) = 0$, alors $|x + ty| = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et donc (par la propriété de séparation de la valeur absolue) $x + ty = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier, si $t = 0$, on trouve $x = 0$ et ainsi $ty = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi, si $t = 1$, on obtient aussi que $y = 0$.
- Homogénéité : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a, par homogénéité de la valeur absolue,

$$N(\lambda(x, y)) = N(\lambda x, \lambda y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|\lambda x + t \lambda y|}{\sqrt{1 + t^2}} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\lambda| \frac{|x + ty|}{\sqrt{1 + t^2}} = |\lambda| N(x, y).$$

- Inégalité triangulaire : Soient $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue, on a

$$\frac{|x_1 + x_2 + t(y_1 + y_2)|}{\sqrt{1 + t^2}} = \frac{|x_1 + ty_1 + x_2 + ty_2|}{\sqrt{1 + t^2}} \leq \frac{|x_1 + ty_1|}{\sqrt{1 + t^2}} + \frac{|x_2 + ty_2|}{\sqrt{1 + t^2}} \leq N(x_1, y_1) + N(x_2, y_2),$$

et donc, en passant au supremum sur les réels t , on obtient

$$N((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \leq N(x_1, y_1) + N(x_2, y_2).$$

Donc N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrons maintenant que $N = \|\cdot\|_2$.

a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^2$ aux vecteurs (x, y) et $(1, t)$, on obtient

$$|x + ty| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + t^2},$$

ce qui permet de conclure que

$$\frac{|x + ty|}{\sqrt{1 + t^2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|_2,$$

et ainsi, en passant au supremum sur les $t \in \mathbb{R}$,

$$N(x, y) \leq \|(x, y)\|_2.$$

b) Si $x \neq 0$, on choisit $t_0 = \frac{y}{x}$ et on obtient que

$$N(x, y) \geq \frac{|x + t_0 y|}{\sqrt{1 + t_0^2}} = \frac{\left|x + \frac{y^2}{x}\right|}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|_2.$$

Si $x = 0$, alors

$$N(0, y) \geq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|ty|}{\sqrt{1 + t^2}} = |y| = \|(0, y)\|_2,$$

et on a donc montré que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x, y) \geq \|(x, y)\|_2$, ce qui permet finalement de conclure que $N = \|\cdot\|_2$.

Exercice 9. Normes et inégalités

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|.$$

En déduire que $\|x\| + \|y\| \leq 2 \max(\|x + y\|, \|x - y\|)$.

La constante 2 peut-elle être améliorée ?

2. On considère maintenant la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 = \frac{1}{2} (\|x + y\|_2^2 + \|x - y\|_2^2),$$

puis que

$$(\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \leq \|x + y\|_2^2 + \|x - y\|_2^2.$$

En déduire que

$$\|x\|_2 + \|y\|_2 \leq \sqrt{2} \max(\|x + y\|_2, \|x - y\|_2).$$

La constante $\sqrt{2}$ peut-elle être améliorée ?

Indication pour l'ensemble de l'exercice : pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^n$, $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$.

Correction.

1. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, alors

$$\begin{aligned}\|x\| &= \left\| \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \right\| \leq \frac{1}{2}\|x+y\| + \frac{1}{2}\|x-y\| \\ \|y\| &= \left\| \frac{y+x}{2} + \frac{y-x}{2} \right\| \leq \frac{1}{2}\|y+x\| + \frac{1}{2}\|y-x\|,\end{aligned}$$

et ainsi, par symétrie $\|x-y\| = \|y-x\|$, on obtient

$$\|x\| + \|y\| \leq \frac{1}{2}\|x+y\| + \frac{1}{2}\|x-y\| + \frac{1}{2}\|y+x\| + \frac{1}{2}\|y-x\| = \|x+y\| + \|x-y\|.$$

Comme $\|x+y\| \leq \max(\|x+y\|, \|x-y\|)$ et $\|x-y\| \leq \max(\|x+y\|, \|x-y\|)$, on obtient finalement que

$$\|x\| + \|y\| \leq 2 \max(\|x+y\|, \|x-y\|).$$

Soit $n = 2$ et considérons $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$. Pour $x = (1, 0)$ et $y = (0, 1)$, on obtient

$$\|x\|_\infty + \|y\|_\infty = 1+1 = 2 \quad 2 \max(\|x+y\|_\infty, \|x-y\|_\infty) = 2 \max(\|(1, 1)\|_\infty, \|(1, 1)\|_\infty) = 2 \max(1, 1) = 2.$$

Ainsi, on a $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty = 2 \max(\|x+y\|_\infty, \|x-y\|_\infty)$ pour ces points et la constante 2 ne peut pas être améliorée.

2. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, alors on a

$$\begin{aligned}4\|x\|_2^2 &= 4 \left\| \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \right\|_2^2 = \|x+y+x-y\|_2^2 = \|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 + 2\langle x+y, x-y \rangle \\ &= \|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 + 2\langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + 2\langle x, y \rangle - 2\langle y, y \rangle \\ &= \|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 + 2\|x\|_2^2 - 2\|y\|_2^2.\end{aligned}$$

On obtient de même

$$4\|y\|^2 = \|y+x\|_2^2 + \|y-x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2 - 2\|x\|_2^2,$$

et ainsi

$$\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 = \frac{1}{2} (\|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2).$$

De plus,

$$(\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 \leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 = 2\|x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2.$$

On obtient finalement, en utilisant l'égalité montrée précédemment,

$$(\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \leq 2 (\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2) \leq \|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 \leq 2 \max(\|x+y\|_2, \|x-y\|_2)^2$$

et on a ainsi montré que $\|x\|_2 + \|y\|_2 \leq \sqrt{2} \max(\|x+y\|_2, \|x-y\|_2)$.

Encore une fois, la constante ne peut pas être améliorée car pour $n = 2$, $x = (1, 0)$ et $y = (0, 1)$, on a égalité

$$\|x\|_2 + \|y\|_2 = 2 = \sqrt{2} \max(\|x+y\|_2, \|x-y\|_2) = 2.$$

Exercice 10. Normes équivalentes, inclusions de boules et suites

Soient N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^n$ et $k > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$, on note $\overline{B}_1(x, r)$ et $\overline{B}_2(x, r)$ les boules fermées pour les normes N_1 et N_2 centrées en x et de rayon $r > 0$.

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\forall x \in \mathbb{R}^n, N_2(x) \leq kN_1(x)$;
- (ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall r > 0, \overline{B}_1(x, r) \subset \overline{B}_2(x, kr)$.
- (iii) $\overline{B}_1(0, 1) \subset \overline{B}_2(0, k)$.

2. Montrer que $N_1 \sim N_2$ si et seulement si il existe $m > 0$ et $M > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$,

$$\overline{B_1}(x, r) \subset \overline{B_2}\left(x, \frac{r}{m}\right) \quad \text{et} \quad \overline{B_2}(x, r) \subset \overline{B_1}(x, Mr).$$

3. Montrer que $\overline{B_1}(0, 1) = \overline{B_2}(0, 1) \iff N_1 = N_2$.
4. On suppose que $N_1 \sim N_2$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^n$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}^n$ pour N_1 . Montrer que :
- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour N_2 .
 - la suite $(N_1(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente pour $|\cdot|$ et préciser sa limite (le même résultat est vrai pour la suite $(N_2(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$).

Correction.

1. (i) $\Rightarrow$ (ii). On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}^n, N_2(x) \leq kN_1(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Soit $y \in \overline{B_1}(x, r)$, alors $N_1(x - y) \leq r$. On en déduit que $(1/k)N_2(x - y) \leq r$ et donc que $N_2(x - y) \leq kr$. Ainsi $y \in \overline{B_2}(x, kr)$ et on a montré que $\overline{B_1}(x, r) \subset \overline{B_2}(x, kr)$.
- (ii) $\Rightarrow$ (iii). On applique simplement (ii) à $x = 0$ et $r = 1$.
- (iii) $\Rightarrow$ (i). On suppose que $\overline{B_1}(0, 1) \subset \overline{B_2}(0, k)$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Si $x = 0$, alors (i) est évidente. Si $x \neq 0$, alors $\frac{x}{N_1(x)} \in \overline{B_1}(0, 1)$ car, par homogénéité, $N_1\left(\frac{x}{N_1(x)}\right) = \frac{N_1(x)}{N_1(x)} = 1$. Comme $\overline{B_1}(0, 1) \subset \overline{B_2}(0, k)$, on en déduit que $\frac{x}{N_1(x)} \in \overline{B_2}(0, k)$. Ainsi, $N_2\left(\frac{x}{N_1(x)}\right) \leq k$, c'est-à-dire $N_2(x) \leq kN_1(x)$ par homogénéité (car $k > 0$).
2. On a $N_1 \sim N_2$ si et seulement si il existe $m > 0$ et $M > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$mN_2(x) \leq N_1(x) \leq MN_2(x).$$

On a donc $N_2(x) \leq \frac{1}{m}N_1(x)$, ce qui est équivalent, via (i) $\iff$ (ii), à $\overline{B_1}(x, r) \subset \overline{B_2}\left(x, \frac{r}{m}\right)$ pour tout $r > 0$. De même, $N_1(x) \leq MN_2(x)$ est équivalent à $\overline{B_2}(x, r) \subset \overline{B_1}(x, Mr)$ pour tout $r > 0$.

3. Il est clair que si $N_1 = N_2$, alors $\overline{B_1}(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : N_1(x) \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n : N_2(x) \leq 1\} = \overline{B_2}(0, 1)$. Réciproquement, comme on a $\overline{B_1}(0, 1) \subset \overline{B_2}(0, 1)$ et $\overline{B_2}(0, 1) \subset \overline{B_1}(0, 1)$, la question 1. appliquée à $k = 1$ permet de conclure que $N_1(x) \leq N_2(x)$ et $N_2(x) \leq N_1(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et donc que $N_1 = N_2$.
4. a) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ pour N_1 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad N_1(u_n - \ell) < \varepsilon.$$

Comme N_2 et N_1 sont équivalentes, il existe $m > 0$ tel que $mN_2(x) \leq N_1(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Soit $\varepsilon' > 0$. En appliquant la caractérisation précédente de la limite à $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{m}$, on obtient qu'il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$,

$$N_2(u_n - \ell) \leq mN_1(u_n - \ell) < m\varepsilon = \varepsilon',$$

et donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour N_2 .

- b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, par la deuxième inégalité triangulaire,

$$|N_1(u_n) - N_1(\ell)| \leq N_1(u_n - \ell).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour N_1 , alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$|N_1(u_n) - N_1(\ell)| \leq N_1(u_n - \ell) < \varepsilon,$$

et donc $(N_1(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $N_1(\ell)$.