Université Claude Bernard Lyon 1 UE Analyse 4

L2, Semestre de Printemps 2024-2025

Feuille 1 : Normes sur $\mathbb{R}^n$ et ensembles de points

Objectifs	OUI	NON
Savoir manipuler les valeurs absolues		
Savoir démontrer et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz		
Savoir tracer des ensembles de points du plan		
Savoir montrer qu'un ensemble est borné		
Savoir montrer une (non-)inclusion d'ensembles		
Savoir démontrer qu'une application est une norme		
Définir des hypothèses pour lesquelles une application est bien une norme		
Savoir utiliser les deux inégalités triangulaires		
Savoir dessiner la boule unité pour une norme donnée		
Relier une inégalité avec des normes et une inclusion de boules		
Utiliser la définition de limite convergente pour une norme donnée		

Exercice 1. Ensembles de points de $\mathbb{R}^2$

I. Donner une allure des ensembles suivants dans le plan.

1. $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y - 1 = 0\}$
2. $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2\}$
3. $A_3 = \{(x, x^3 - 4) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1]\}$
4. $A_4 = \{(\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 : t \in]0, 2\pi[\}$
5. $A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 = 3\}$
6. $A_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$
7. $A_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0 \text{ et } x > y\}$
8. $A_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 < x\}$
9. $A_9 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + 2| + |y - 1| \leq 1\}$
10. $A_{10} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y|) > 2\}$
11. $A_{11} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geq 1, x^2 + y^2 \leq 2\}$.

II. Donner l'expression du complémentaire de chacun des ensembles suivants : A_6, A_7, A_9 et A_{11}.

Exercice 2. Ensembles bornés

On dit que $A \subset \mathbb{R}^n$ est borné si, $\exists (M_1, ..., M_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in A$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $|x_i| \leq M_i$ (une définition équivalente sera donnée en CM).

Montrer que les ensembles suivants sont bornés.

1. $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : 3\sqrt{\dfrac{1}{|x - 2| + 1}} > 1 \right\}$
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 1\}$
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x(1 - 2x)\}$
4. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e^{x^2+y^2+z^2+1} + \sin(xyz) \leq 4\}$

Exercice 3. Inclusion et non-inclusion d'ensembles

1. Soient $a < b$ deux réels.
   a) Montrer que $]a,b[= \left\{y \in \mathbb{R} : \left|y - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{b-a}{2}\right\}$.
   b) Soit $x \in]a,b[$ et $\delta = \frac{b-a}{2} - \left|x - \frac{a+b}{2}\right|$. Montrer que $]x-\delta, x+\delta[\subset]a,b[$.
2. Soient $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3\}$ et $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 \leq 9\}$. Montrer que $B \subset E$.
3. Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$.
   a) Préciser la nature de l'ensemble A et le tracer dans le plan.
   b) Montrer que $(-1,3) \in A$ (un dessin ne suffit pas !).
   c) Pour tout $r > 0$, on définit l'ensemble $B_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + (y-3)^2 < r^2\}$.
   Pour tout $r > 0$, préciser la nature de B_r et montrer que $B_r \not\subset A$.

Exercice 4. Inégalité de Cauchy-Schwarz et applications

Le but de cet exercice est de démontrer l'inégalité suivante, appelée inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

1. Montrer cette inégalité si $x = (0, ..., 0)$ ou $y = (0, ..., 0)$.
2. Soient $x = (x_1, ..., x_n) \neq (0, ..., 0)$, $y = (y_1, ..., y_n) \neq (0, ..., 0)$ et $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t) = \sum_{i=1}^n (x_i + t y_i)^2.$$
   a) Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = at^2 + bt + c$.
   b) En considérant le signe de P sur $\mathbb{R}$, démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
3. Montrer que $\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$ si et seulement si x et y sont liés.
4. **Applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.** Soit $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.
   a) Démontrer que $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$ et étudier le cas d'égalité.
   b) On suppose en outre que pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $x_k > 0$, et que $\sum_{k=1}^n x_k = 1$. Démontrer que
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$$
   et étudier le cas d'égalité.

Exercice 5. Preuve fausse à corriger

Déterminer toutes les erreurs commises dans la preuve ci-dessous et la corriger.

Montrons que l'application $N : (x,y) \mapsto |5x + 3y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$. En effet, on a :

1. *Si $(x,y) = (0,0)$, alors $N(x,y) = N(0,0) = 0$.*
2. *Soit $\lambda \geq 0$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors $N(\lambda(x,y)) = N(\lambda x, \lambda y) = |5 \times \lambda x + 3 \times \lambda y| = \lambda N(x,y)$.*
3. *Soient $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, alors*
$$N(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = |5x_1 + 5x_2 + 3y_1 + 3y_2| \leq N(x_1, y_1) + N(x_2, y_2).$$

Exercice 6. Norme sur $\mathbb{R}^2$

Montrer que l'application $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \|(x_1, x_2)\| := \max\left(|x_1 + 3x_2|, |x_1 - x_2|\right)$$

est une norme dont on tracera la boule unité fermée.

Exercice 7. Normes classiques équivalentes
On dit que deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, et on note $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$, s'il existe deux réels $m > 0$ et $M > 0$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|.$$
On rappelle la définition des trois normes dites “classiques" sur $\mathbb{R}^n$:
$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad \|x\|_2 := \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty := \max_{1\leq k\leq n} |x_k|.$$
Montrer que ces trois normes sont équivalentes deux-à-deux.

Exercice 8. Norme plus "exotique"... ou pas !
Soit $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|x + ty|}{\sqrt{1 + t^2}}$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$ (en vérifiant les propriétés d'une norme).
2. Dans cette question, on souhaite montrer qu'en fait N est la norme euclidienne.
   a) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $N \leq \|\cdot\|_2$.
   b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En considérant $t = \frac{y}{x}$ (si $x \neq 0$) et la limite de $\frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}}$ quand $t \to +\infty$ (si $x = 0$), démontrer que $N(x, y) \geq \|(x, y)\|_2$ et conclure.

Exercice 9. Normes et inégalités
Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,
$$\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|.$$
   En déduire que $\|x\| + \|y\| \leq 2 \max(\|x + y\|, \|x - y\|)$.
   La constante 2 peut-elle être améliorée ?
2. On considère maintenant la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,
$$\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 = \frac{1}{2}\left(\|x + y\|_2^2 + \|x - y\|_2^2\right),$$
   puis que
$$(\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \leq \|x + y\|_2^2 + \|x - y\|_2^2.$$
   En déduire que
$$\|x\|_2 + \|y\|_2 \leq \sqrt{2} \max(\|x + y\|_2, \|x - y\|_2).$$
   La constante $\sqrt{2}$ peut-elle être améliorée ?

Indication pour l'ensemble de l'exercice : pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^n$, $a = \dfrac{a + b}{2} + \dfrac{a - b}{2}$.

Exercice 10. Normes équivalentes, inclusions de boules et suites
Soient N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^n$ et $k > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$, on note $\overline{B_1}(x,r)$ et $\overline{B_2}(x,r)$ les boules fermées pour les normes N_1 et N_2 centrées en x et de rayon $r > 0$.

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $N_2(x) \leq kN_1(x)$;
   (ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall r > 0$, $\overline{B_1}(x,r) \subset \overline{B_2}(x,kr)$.
   (iii) $\overline{B_1}(0,1) \subset \overline{B_2}(0,k)$.
2. Montrer que $N_1 \sim N_2$ si et seulement si il existe $m > 0$ et $M > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$,
$$\overline{B_1}(x,r) \subset \overline{B_2}\left(x, \frac{r}{m}\right) \quad \text{et} \quad \overline{B_2}(x,r) \subset \overline{B_1}(x,Mr).$$
3. Montrer que $\overline{B_1}(0,1) = \overline{B_2}(0,1) \iff N_1 = N_2$.
4. On suppose que $N_1 \sim N_2$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^n$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}^n$ pour N_1. Montrer que :
   a) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour N_2.
   b) la suite $(N_1(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente pour $|\cdot|$ et préciser sa limite (le même résultat est vrai pour la suite $(N_2(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$).