Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre de Printemps 2024–2025**

L2 UE : Analyse 4

Révisions pour le Contrôle Partiel du 14/03/2025

Chapitres au Programme (CM+TD) : Normes, Topologie, Continuité.

Premièrement, il faut vous assurer que :

- vous avez correctement appris tous les résultats du cours, que rien ne vous a échappé,
- vous avez fait les exercices donnés en CM (vérifications, calculs) et compris les exemples,
- vous avez compris les questions/réponses données lors des Vrai/Faux,
- vous savez faire tous les exercices faits en TD **(4 points au CP)**.

Deuxièmement, les preuves à connaître sont du 1. au 12. (4 points au CP).

Troisièmement, voici d'autres exercices pour vous entraîner (cf. la page de l'UE où il y a les sujets/corrections) :

- CP1 2023 en entier,
- CP2 2023, Exercice 2 Partie I,
- CP 2024 en entier.

Exercice 1 Définition d'une norme

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^2$ et $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$N(x, y) = |ax + by| + |cx + dy|.$$

Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Exercices associés : TD1, Exercices 5 et 6.

Exercice 2 Normes et boules

Soit $N : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto 2|x| + 3|y| + |z|$. On admet que N est une norme sur $\mathbb{R}^3$ (c'est un exercice facile). Montrer que

$$\forall X \in \mathbb{R}^3, \quad \forall r > 0, \quad B_{\|\cdot\|_1}(X, r) \subset B_N(X, 3r) \subset B_{\|\cdot\|_\infty}(X, 3r),$$

où B_N, $B_{\|\cdot\|_1}$ et $B_{\|\cdot\|_\infty}$ désignent les boules ouvertes pour les normes N, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^3$.

Exercices associés : TD1, Ex 7 et 10.

Exercice 3 Ensemble ni ouvert ni fermé

Montrer que l'ensemble $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y|) \leqslant 1, y > -1\}$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Exercices associés : TD2, Ex 2.

Exercice 4 Ensemble ouvert

Soient $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xye^{xy^2} > 1\}$ et $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 1| + |y| < 10\}$.

Montrer que $A \cap C$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercices associés : TD2, Ex 1 et 2.

Exercice 5 Continuité d'une fonction

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x+y|}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est-elle continue en $(0,0)$?

Exercices associés : TD3, Ex 3, 4, 5.

Exercice 6 Fonction continue

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5+y^5}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   est continue.

2. Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + y^2 \leqslant 1\}$. Montrer que f admet un minimum sur E.

Exercices associés : TD3, Ex 3, 4, 5.