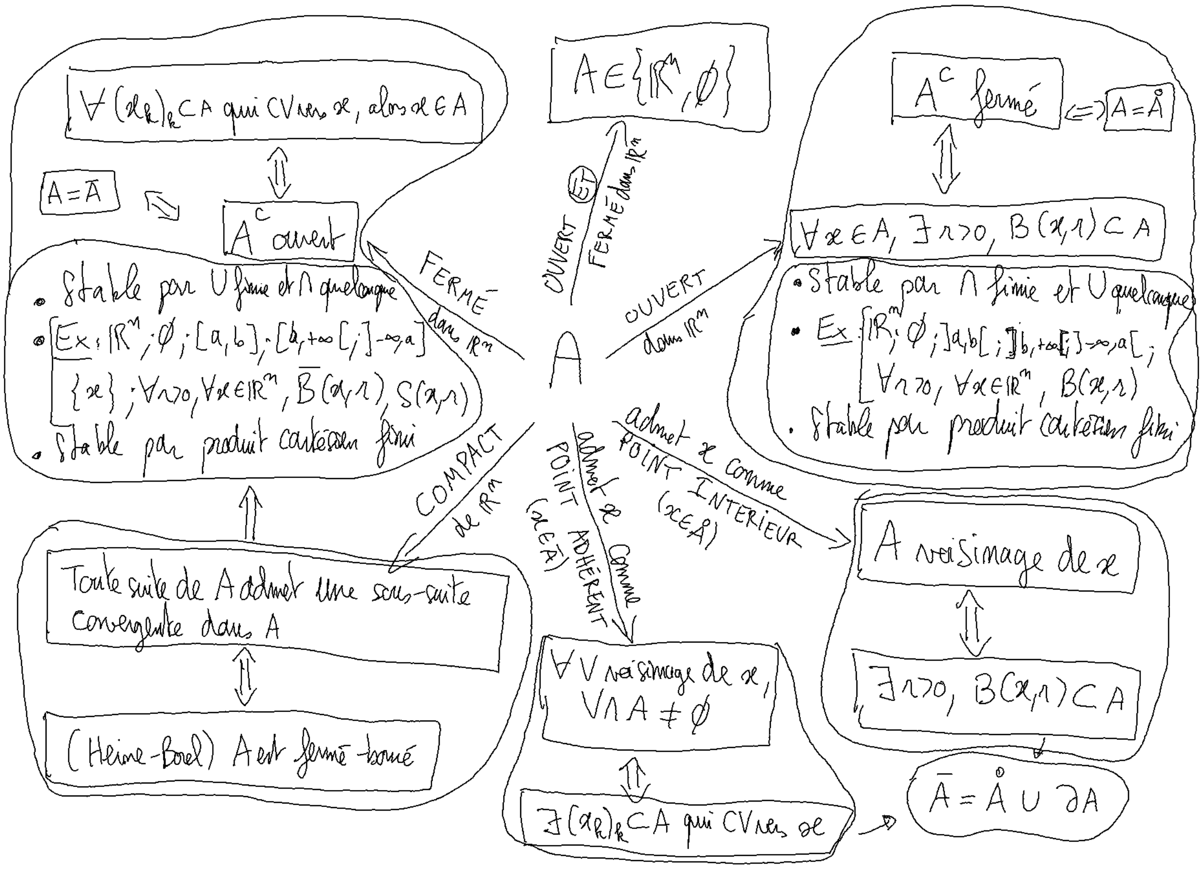
Résumé de Topologie (Analyse 4, L. Bétermin)



Pour montrer que A est ouvert dans $\mathbb{R}^n$:

- On montre que l'on peut construire une boule ouverte incluse dans A centrée en tout point x de A.
  Rédaction : soit $x \in A$, alors pour $r =$ [rayon à trouver]*, montrons que $B(x,r) \subset A$. En effet, soit $y \in B(x,r)$, alors [suite d'arguments], et donc $y \in A$, ce qui prouve que A est ouvert.*
- Si $A = f^{-1}(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in \Omega\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ ouvert et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ continue, alors A est ouvert.
- On montre que A^c est fermé (cf. ci-dessous).

Pour montrer que A n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}^n$:

- On montre qu'il existe un point de A qui ne peut pas être le centre d'une boule ouverte incluse dans A.
  Rédaction : On considère le point x_0 [à trouver], alors pour tout $r > 0$, $B(x_0, r) \not\subset A$ car $y_0 =$ [à trouver] *$\in B(x_0, r)$ mais $y_0 \notin A$ et donc A n'est pas ouvert [typiquement, on cherche x_0 "au bord" de A $y_0 = x_0 \pm \frac{r}{2}e_i$ pour un des vecteur e_i de la base canonique, c'est-à-dire x_0 dans A mais pas dans son intérieur $\mathring{A}$].*
- On montre que A^c n'est pas fermé (cf. ci-dessous).

Pour montrer que A est fermé dans $\mathbb{R}^n$:

- On montre que toute suite convergente d'éléments de A a sa limite qui appartient à A.
  Rédaction : soit $(x_k)_k \subset A$ qui converge vers x. Montrons que $x \in A$. [suite d'arguments liés à la définition de A et au passage à la limite], et donc $x \in A$ et A est fermé.
- Si $A = f^{-1}(F) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in F\}$ où $F \subset \mathbb{R}^p$ est un fermé et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est continue, alors A est fermé.
- On montre que A^c est ouvert (cf. ci-dessus).

Pour montrer que A n'est pas fermé dans $\mathbb{R}^n$:

- On cherche une suite d'éléments de A dont la limite n'appartient pas à A.
  Rédaction : La suite $(x_k)_k$ [à trouver] est une suite d'éléments de A [à justifier] et on a $\lim_{k \to +\infty} x_k = x \notin A$. [on cherche donc un point x adhérent à A ($x \in \bar{A}$), sur son bord, qui n'appartient pas à A]
- On montre que A^c n'est pas ouvert (cf. ci-dessus).

Pour montrer que A est un compact de $\mathbb{R}^n$:

- On montre que de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite convergente dans A.
  Rédaction : Soit $(x_k)_k \subset A$, alors [suite d'arguments] et donc $(x_{\varphi(k)})_k$ est une sous-suite de $(x_k)_k$ qui converge vers x. De plus, [suite d'arguments], et donc $x \in A$. Donc A est compact.
- On montre que A est fermé et borné dans $\mathbb{R}^n$.
  Rédaction : soit $x \in A$, alors [suite d'arguments] et donc il existe $M > 0$, indépendant de x, tel que $\|x\|_2 \le M$ [ou une autre norme]. Donc A est borné. Pour montrer que A est fermé, cf. ci-dessus. Ainsi, A est compact d'après le théorème de Heine-Borel.