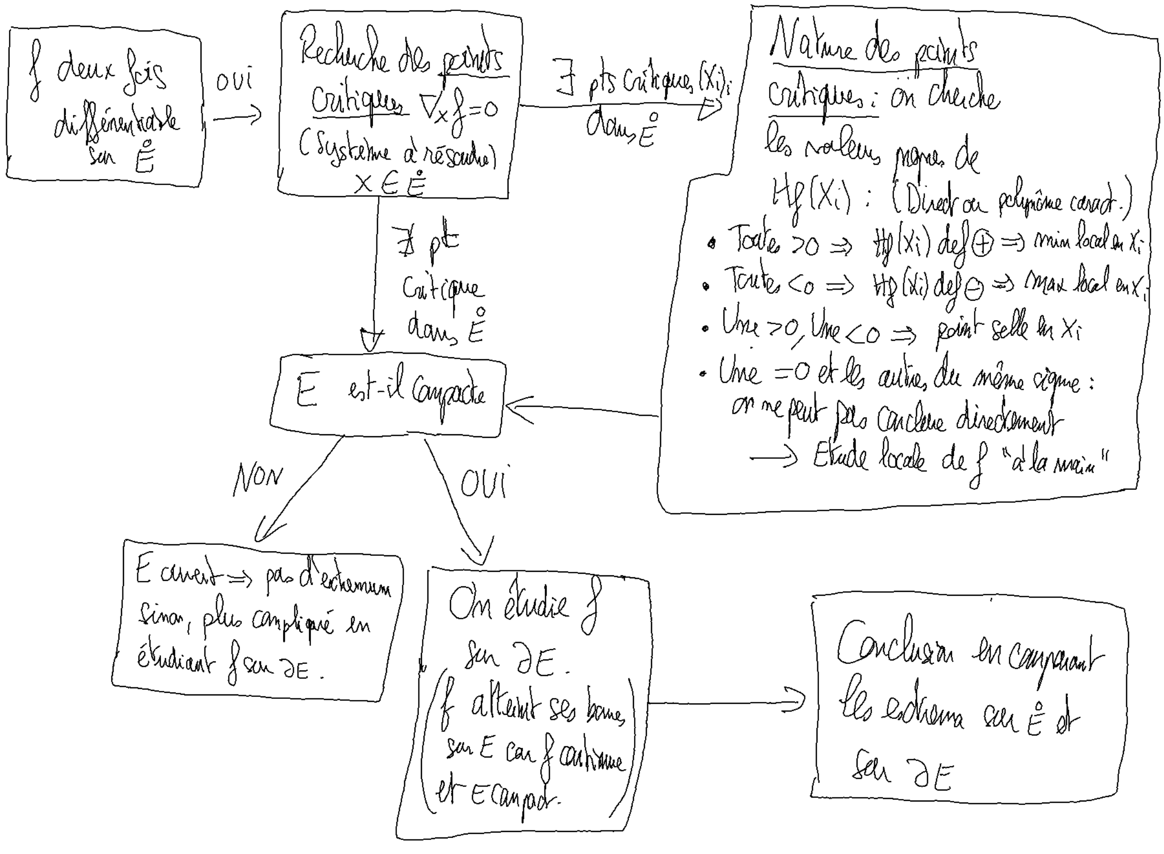
Résumé : étude d'extrema (Analyse 4, L. Bétermin)



Ici on considère $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable sur $\mathring{E}$ et $X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Difficultés éventuelles :

1. Calcul des dérivées partielles premières et secondes. Il faut être extrêmement vigilant.e ici, car toute erreur impliquera des résultats faux tout au long de la chaîne de calculs.

2. Résoudre le système $\nabla_X f = 0$ donne un système à n équations (le nombre de dérivées partielles premières) et n inconnues (le nombre de variables).
   - Ces équations sont rarement linéaires.
   - Pensez à factoriser, substituer une inconnue en fonctions des autres et/ou ajouter/soustraire les équations.
   - Ne divisez PAS par une inconnue (car elle pourrait valoir 0 !).

3. Déterminer les valeurs propres $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ de $H_f(X_i)$ ou leur signe, où X_i est un point critique.
   - Si la matrice est diagonale, on lit directement les valeurs propres sur cette diagonale (on ne calcule pas le polynôme caractéristique ! !).
   - On calcule $\det(H_f(X_i)) = \lambda_1 ... \lambda_n$ et $\mathrm{Tr}(H_f(X_i)) = \lambda_1 + ... + \lambda_n$ et on cherche à en déduire des informations sur le signe de ces valeurs propres.
   - Critère de Sylvester : pour montrer que $H_f(X_i)$ est définie positive, on montre que ses mineurs principaux sont strictement positifs.
   - Sinon, on calcule son polynôme caractéristique dont la formule est $P(X) = \det(XI_n - H_f(X_i))$ et on cherche ses racines (ou on le factorise en produit de facteurs irréductibles et on lit directement les racines annulant ces facteurs).

4. Conclure quand une (ou plusieurs) valeurs propres sont nulles et les autres du même signe.

- Idée 1 (très rare) : on développe f au voisinage de X_i avec la formule de Taylor à l'ordre 3 (ou plus) en étudiant le signe du polynôme obtenu.
- Idée 2 (mieux) : il faut étudier f "à la main" au voisinage de X_i,
  a) soit par des inégalités en montrant que f est minorée/majorée par $f(X_i)$ (qu'il faut donc calculer), et donc on obtiendra un minimum/maximum local,
  b) soit en trouvant des courbes (par exemple, si $n = 2$ et $X_i = (0, 0)$, $f(x, x)$, $f(x, -x)$, $f(0, x)$, etc., avec x petit) sur lesquelles $f(X) - f(X_i)$ n'a pas (localement) le même signe (pour l'une on aura maximum local, pour l'autre un minimum local), et donc on obtiendra un point selle.

5. Etudier f sur ∂E donne souvent une fonction à $n - 1$ variables à étudier (minima/maxima, variations si $n - 1 = 1$). Si $n = 2$, elle sera sous la forme $g(t) = f(x(t), y(t))$ où $\partial E = \{(x(t), y(t)), t \in I\}$ est une courbe géométrique de $\mathbb{R}^2$.