

Exemple 5.7. (Différentielle seconde)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^4 y + 2x^2 - 3y^3.$$

Alors les dérivées partielles premières sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 y + 4x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^4 - 9y^2.$$

Les applications $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont différentiables car polynomiales. On en déduit que f est deux fois différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Ses dérivées partielles secondes sont données par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 y + 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -18y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 4x^3.$$

La hessienne de f au point (x, y) est donc

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 y + 4 & 4x^3 \\ 4x^3 & -18y \end{pmatrix},$$

et en particulier, au point $(0, 1)$,

$$H_f(0, 1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas général, la forme bilinéaire associée à la différentielle seconde est, pour $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ et $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$D_{(x,y)}^2 f(h, k) = (12x^2 y + 4)h_1 k_1 + 4x^3 h_2 k_1 + 4x^3 h_1 k_2 - 18y h_2 k_2,$$

de forme quadratique correspondante

$$\langle H_f(x, y)h, h \rangle = D_{(x,y)}^2 f(h, h) = (12x^2 y + 4)h_1^2 + 8x^3 h_1 h_2 - 18h_2^2.$$

et donc, au point $(0, 1)$, cette forme vaut

$$D_{(0,1)}^2 f(h, k) = 4h_1 k_1 - 18h_2 k_2,$$

et sa forme quadratique associée est

$$D_{(0,1)}^2 f(h, h) = 4h_1^2 - 18h_2^2.$$

Remarque 5.8. (Développement au premier ordre de la différentielle) Au sens de la définition précédente, être deux fois différentiable pour f est équivalent avec le fait que Df soit différentiable, car

$$\forall x_0 \in \Omega, \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad D_{x_0} f(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i.$$

En effet, la différentiabilité (par rapport au point) de toutes les dérivées partielles équivaut à celle de l'application $x_0 \mapsto D_{x_0} f(h)$ pour tout h fixé. Ainsi, on peut écrire, dans l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, pour tout h' suffisamment petit (tendant vers 0), pour tout $x_0 \in \Omega$,

$$D_{x_0+h'} f = D_{x_0} f + D_{x_0}(Df)(h') + o(\|h'\|),$$

qui peut se réécrire, avec $\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tendant vers l'application linéaire nulle quand $h' \rightarrow 0$:

$$D_{x_0+h'}f = D_{x_0}f + D_{x_0}(Df)(h') + \|h'\|\varepsilon(h').$$

On voit ici qu'un problème conceptuel/technique survient car nous n'avons pas défini la norme d'une application linéaire, donc la notion $o(\|h'\|)$ pourrait paraître ici un peu ambigu. Une autre façon d'écrire cette égalité est de l'appliquer à un vecteur $h \in \mathbb{R}^n$:

$$D_{x_0+h'}f(h) = D_{x_0}f(h) + D_{x_0}[(Df)(h')](h) + \|h'\|\varepsilon(h').$$

où maintenant $\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dépend de h et tend vers 0, uniformément par rapport à h , quand $h' \rightarrow 0$. On rappelle ce que cette égalité signifie : $\forall h \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h' \in \mathbb{R}^n$,

$$\|h'\| < \delta \Rightarrow |D_{x_0+h'}f(h) - D_{x_0}f(h) - D_{x_0}[(Df)(h')](h)| < \varepsilon \|h'\|.$$

Comme l'application

$$\varphi : h \mapsto D_{x_0+h'}f(h) - D_{x_0}f(h) - D_{x_0}[(Df)(h')](h)$$

est linéaire, on peut appliquer l'égalité précédente au vecteur $\frac{h}{\|h\|}$, $h \neq 0$ (le cas $h = 0$ sera évident à la fin du raisonnement) et on obtient (pour un nouveau ε qui tend toujours vers 0, puisque l'on a seulement échangé h par $h/\|h\|$ et que la limite était uniforme en h) :

$$\varphi\left(\frac{h}{\|h\|}\right) = \|h'\|\varepsilon(h'),$$

ce qui implique que $\varphi(h) = \|h\|\|h'\|\varepsilon(h')$ et finalement, comme $D_{x_0}[(Df)(h')](h) = D_{x_0}^2f(h', h)$, que, pour tout $x_0 \in \Omega$, pour tout h' suffisamment petit et pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$D_{x_0+h'}f(h) = D_{x_0}f(h) + D_{x_0}^2f(h', h) + \|h\|\|h'\|\varepsilon(h').$$

Encore une fois, cela se traduit par : $\forall h \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h' \in \mathbb{R}^n$,

$$\|h'\| < \delta \Rightarrow |D_{x_0+h'}f(h) - D_{x_0}f(h) - D_{x_0}^2f(h', h)| < \varepsilon \|h\|\|h'\|.$$