Université Claude Bernard Lyon 1 UE Analyse 4

L2, Semestre de Printemps 2024-2025

Liste des preuves du cours à savoir refaire parfaitement pour les évaluations

Sont listées ici l'intégralité des énoncés qu'il vous faut savoir parfaitement démontrer en vue des questions de cours qu'il y aura aux évaluations (2 ou 3 questions par contrôle).

1. Deuxième inégalité triangulaire.
2. Convergence des coordonnées d'une suite, sens direct : Si $(x_k)_k = (x_k^1, ..., x_k^n)_k \subset \mathbb{R}^n$ converge vers $x = (x^1, ..., x^n)$ pour $\| \cdot \|_2$, alors pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $(x_k^i)_k$ converge vers x^i pour $| \cdot |$.
3. Convergence des coordonnées d'une suite, réciproque : Si, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $(x_k^i)_k$ converge vers x^i pour $| \cdot |$, alors $(x_k)_k = (x_k^1, ..., x_k^n)_k \subset \mathbb{R}^n$ converge vers $x = (x^1, ..., x^n)$ pour $\| \cdot \|_2$.
4. La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est un ouvert.
5. L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.
6. Toute boule ouverte de $\mathbb{R}^n$, pour n'importe quelle norme, est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
7. Toute boule fermée de $\mathbb{R}^n$, pour n'importe quelle norme, est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
8. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $A \subset \mathbb{R}^n$, alors $x \in \overline{A}$ si et seulement si $d(x, A) = 0$, où on a défini la distance de x à l'ensemble A par $d(x, A) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|_2$.
9. L'intersection quelconque de compacts de $\mathbb{R}^n$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.
10. La réunion d'une famille finie de compacts de $\mathbb{R}^n$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.
11. Toute norme sur $\mathbb{R}^n$ est une fonction uniformément continue.
12. L'image d'un compact par une application continue est un compact (c'est uniquement la partie "$f(K)$ compact" du théorème de Weierstrass).
13. Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, Ω ouvert, $x_0 \in \Omega$. Si f est différentiable en x_0, alors f est continue en x_0.
14. Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, Ω ouvert, et $x_0 \in \Omega$. Si f est différentiable en x_0, alors f admet une dérivée en x_0 suivant tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = D_{x_0} f(v)$.
15. Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, Ω ouvert, et $x_0 \in \Omega$. Si f est différentiable en x_0, alors, pour tout $h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$,
$$D_{x_0} f(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i.$$
16. L'exemple de Peano. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$
est telle que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.
17. Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On suppose que x_0 est un point intérieur à E, f est différentiable en x_0 et admet en x_0 un extremum local. Alors x_0 est un point critique de f.
18. Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On suppose que x_0 est un point intérieur à E, que f est deux fois différentiable en x_0 et x_0 est un point critique de f. Alors, si f admet en x_0 un minimum local, alors $H_f(x_0)$ est positive.