Université Claude Bernard Lyon 1 UE Analyse 4

L2, Semestre de Printemps 2023-2024

Exercices supplémentaires à rendre (optionnels)

Les six exercices suivants correspondent à des exemples de questions posées au cours des six chapitres du cours d'Analyse 4. Ces questions vous sont proposées principalement afin de vous entraîner à rédiger correctement.

Vous êtes donc invité.e.s à rendre ces exercices (un seul à la fois !) à n'importe quelle séance de Cours Magistral (ni en TD, ni par mail !) afin de bénéficier de conseils (rédaction, points à réviser, etc.).
Remarque : Aucun corrigé ne sera distribué !

Exercice 1. Normes
Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $N(x, y) = |2x + y| + |x - y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et tracer sa boule unité fermée.

Exercice 2. Topologie
On munit $\mathbb{R}^3$ de la norme $\|\cdot\|_2$. Soient A, B et C trois parties de $\mathbb{R}^3$ définies par :

$$\begin{aligned}
A &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 - 2y^2 + z^5 > 0\right\}\\
B &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 + (3-z)^2 < 4\right\}\\
C &= \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |\sin(xyz)| < k\right\}.
\end{aligned}$$

Montrer que $(B \cup C) \cap A$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
Indication : Pour A, faire comme en CM/TD. Pour B, il n'y a pratiquement rien à faire (ne pas faire comme pour A). Pour C, attention, relisez les propriétés des intersections d'ouverts/de fermés.

Exercice 3. Fonctions continues
Etudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{xy^5}{x^4 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0)\\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Exercice 4. Différentiabilité
Etudier l'existence des dérivées partielle ainsi que la différentiabilité de f au point $(-1, 0)$ pour la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)y^2}{(x+1)^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (-1, 0)\\ 0 & \text{si } (x, y) = (-1, 0). \end{cases}$$

Exercice 5. Fonctions de classe C^k
Etudier l'existence des dérivées partielles en $(0, 0)$, la différentiabilité (en utilisant la définition) et le caractère C^1 de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \|(x, y)\|_2^6 \cos\left(\dfrac{1}{\|(x, y)\|_2^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0)\\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Exercice 6. Extrema
Soit $K = [-10, 10]^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - y(x+3)$. Montrer que f admet un maximum sur K et déterminer ce maximum ainsi que le(s) point(s) où celui-ci est atteint.