Exercices introductifs au notions vues en Cours Magistral
CORRECTION

1 Introduction aux concepts du chapitre 1 : Normes

Exercice 1. Valeurs absolues et distances

1. Calculer $|4|$ et $|\sqrt{3}-2|$.
   On a $|4| = 4$ et comme $3 < 4$ alors $\sqrt{3} < 2$ et donc $|\sqrt{3}-2| = 2-\sqrt{3}$.
2. En utilisant le terme “distance", expliquer à quoi correspondent géométriquement $|x|$ et $|x-y|$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   $|x|$ est la distance entre x et 0. De même, $|x-y|$ est la distance entre les réels x et y.
3. Compléter $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = 0 \iff x = 0$.
4. Compléter : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda x| = |\lambda||x|$.
5. Compléter : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |x+y| \leq |x|+|y|$. Comment s'appelle cette inégalité ?
   Il s'agit de l'inégalité triangulaire.
6. Déterminer $A = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| = 1\}$ et $C = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| > 6\}$.
   On a $x \in A \iff |x-1| \leq 2 \iff -2 \leq x-1 \leq 2 \iff -1 \leq x \leq 3$. D'où $A = [1,3]$. Ce sont tous les réels à distance au plus 2 du nombre 1.
   On a $x \in B \iff |x| = 1 \iff x \in \{-1,1\}$. D'où $B = \{-1,1\}$. Ce sont les réels à distance exactement 1 de l'origine.
   On a $x \in C \iff |x-3| > 6 \iff x-3 > 6$ ou $x-3 < -6 \iff x > 9$ ou $x < -3$. D'où $C =]-\infty,-3[\cup]9,+\infty[$. Ce sont les réels qui sont à distance au moins 6 (strictement) du nombre 3.

Exercice 2. Suites convergentes

1. Compléter : on dit que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ converge vers $x \in \mathbb{R}$ si : quelque soit $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang, les termes de la suite sont au plus à distance ε de x.
2. Compléter : $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, |x_k - x| < \varepsilon$.
3. Compléter : $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, x_k \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$.
4. Faire un dessin illustrant cette propriété de convergence.
   Voici un dessin (page suivante) illustrant $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon$$

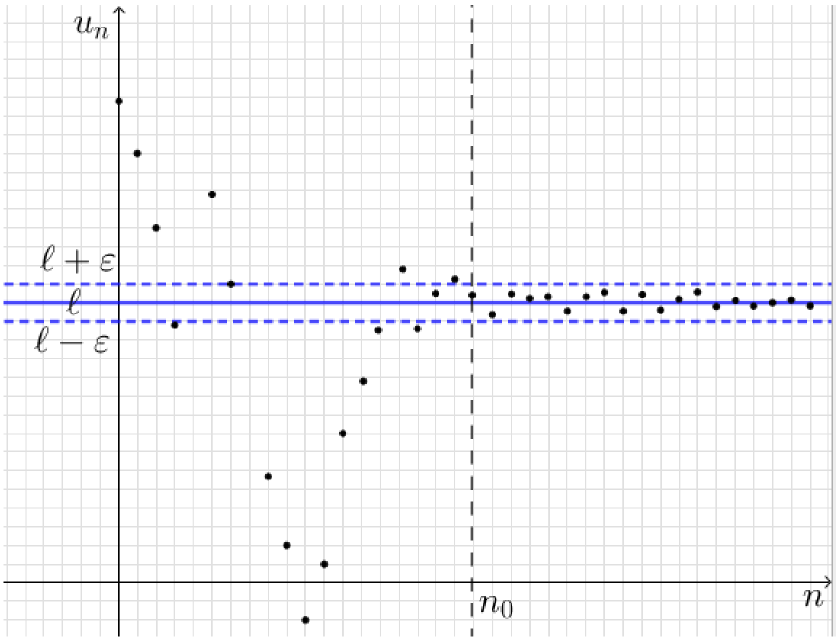

Illustration de la notion de convergence. On fixe $\varepsilon > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que à partir du rang n_0, tous les termes de la suite $(u_n)_n$ sont entre $l - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon$.

2 Introduction aux concepts du chapitre 2 : Topologie

Exercice 3. Intervalles

1. Déterminer l'intervalle ouvert centré en 1 et de rayon 1/3.
   Il s'agit de l'intervalle $\left]1 - \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}\right[= \left]\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right[$.
2. Soit $I =]0, 1[$ et $x = 1/4$. Déterminer deux intervalles ouverts centrés en x et inclus dans I.
   On peut prendre $]0.24, 0.26[$ (de rayon 0.01) et $]0.2, 0.3[$ (de rayon 0.05).
3. Soit $I =]0, 1[$ et $x = 1/4$. Déterminer tous les intervalles ouverts centrés en x et inclus dans I. La réponse est-elle différente si $I = [0, 1[$?
   Il s'agit des intervalles de la forme $I_r =]x - r, x + r[$ avec $r \in]0, 1/4[$. En effet, ces intervalles sont tous centrés en x, et comme, pour tout $r \in]0, 1/4[$, on a $0 < x - r \leq x + r < 1$, alors $I_r \subset]0, 1[$.
   Maintenant, si $r \geq 1/4$, alors $x - r \leq 0$ et donc $I_r \not\subset]0, 1[$ puisque $x - r \notin]0, 1[$.
   La réponse ne change pas si $I = [0, 1[$ (on reprend les mêmes arguments).
4. Soit $J = [0, 1]$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $x_k = 1 - \frac{1}{k+1}$.
   a) Montrer que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset J$.
   Soit $k \in \mathbb{N}$, alors on a $\frac{1}{k+1} > 0$ et donc $x_k < 1$, et de plus
   $$k \geq 0 \iff k + 1 \geq 1 \iff \frac{1}{k+1} \leq 1 \iff -\frac{1}{k+1} \geq -1 \iff x_k = 1 - \frac{1}{k+1} \geq 0,$$
   donc $x_k \in J$.
   b) Déterminer la limite de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
   Il est clair que $\lim_{k\to+\infty} x_k = 1$.
   c) Cette limite appartient-elle à J ?
   Oui, cette limite appartient à J.
   d) Reprendre les questions a)b)c) avec $J = [0, 1[$.
   Dans ce cas, quelque soit $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in J$ mais $\lim_{k\to+\infty} x_k = 1 \notin J$.
5. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [1, 2] \cup [5, 6]$ qui converge vers x. A votre avis, est-ce que x appartient nécessairement à $[1, 2] \cup [5, 6]$? Même question avec $[1, 2] \cap [1/2, 3]$ et $]1, 2[\cap]1/2, 3[$.
   Pour que la limite x reste dans l'ensemble considéré, il semblerait que celui-ci doive être un intervalle fermé, ou une union/intersection d'intervalles fermés, ce qui est bien le cas pour $[1, 2] \cup$

$[5,6]$ et $[1,2] \cap [1/2,3] = [1/2,2]$. Par contre, ce n'est pas le cas pour $]1,2[\cap]1/2,3[=]1/2,2[$ car on peur choisir une suite de cet intervalle qui tend vers 2, valeur qui n'appartient pas à l'ensemble considéré.

Exercice 4. Sous-suites

1. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $x_k = (-1)^k$.
   a) Donner un intervalle fermé I contenant cette suite.
   On peut choisir $[-1,1]$ (ou $[-23,4]$...).
   b) Déterminer une sous-suite convergente de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Sa limite appartient-elle à I ?
   La suite $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une telle sous-suite, qui est la suite constante égale à 1 dont la limite, 1, appartient à I.
2. Enoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.
   Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.
3. A votre avis, pour quels types d'ensembles $A \subset \mathbb{R}$ toute suite de A admet-elle une sous-suite convergente dans A ? (on pourra se référer à l'exercice précédent)
   D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il faudrait qu'un tel A soit borné pour pouvoir extraire une sous-suite qui converge. Pour que sa limite appartienne à A, il faut que A soit un intervalle fermé ou une union/intersection d'intervalles fermés.

3 Introduction aux concepts du chapitre 3 : Continuité

Exercice 5. Définition de la continuité et application

1. Compléter : soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et x_0 un point appartenant à I. Alors f est continue en x_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle ouvert de longueur $2\delta > 0$ centré en x_0 de telle sorte que si x appartient à cet intervalle et à I, $f(x)$ appartiennent à un intervalle ouvert de longueur 2ε centré en $f(x_0)$.
2. Compléter (avec les notations précédentes) : f est continue en x_0 si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$
3. Montrer qu'une fonction linéaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, en utilisant la définition.
   On a que f est linéaire si et seulement si il existe $a \in \mathbb{R}^*$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |ax - ax_0| = |a(x - x_0)| = |a||x - x_0| < |a|\delta = \varepsilon,$$
   et ainsi f est continue en tout point x_0, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Continuité et suites

1. Compléter : Soit $(x_k)_k$ la suite définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $x_k = 1 - \frac{1}{k+1}$. Alors on a, en notant E la fonction partie entière,
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad E(x_k) = 0.$$
   En notant x la limite de $(x_k)_k$, on a donc $x = 1$ et $E(x) = 1$. Ainsi, il est clair que
$$\lim_{k\to+\infty} E(x_k) \neq E\left(\lim_{k\to+\infty} x_k\right).$$
   Cela vient du fait que E n'est pas continue en 1.
2. Compléter : si f est continue en x, on a, pour toute suite $(x_k)_k$ qui tend vers x
$$\lim_{k\to+\infty} f(x_k) = f(x).$$

4 Introduction aux concepts du chapitre 4 : Différentiabilité

Exercice 7. Dérivabilité - définitions et applications

1. Compléter : soit I un intervalle ouvert et $x_0 \in I$. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \text{ est finie}$$

et on note alors $f'(x_0)$ cette limite, appelée nombre dérivée de f en x_0.

2. Montrer que f est dérivable en x_0 si et seulement si, quand $h \to 0$,

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h).$$

Que peut-on dire de l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h \mapsto f'(x_0)h$?
On a que f est dérivable en x_0 si et seulement si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \iff \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - hf'(x_0)}{h} = 0,$$

c'est-à-dire si et seulement si il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en 0 et telle que

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - hf'(x_0)}{h} = \varepsilon(h),$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\varepsilon(h).$$

Comme $h\varepsilon(h) = o(h)$ quand $h \to 0$, l'équivalence est démontrée.
De plus, l'application g est linéaire.

3. Donner le développement limité de en 0 de la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arctan(\cos x)$.
La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = -\frac{\sin x}{1 + \cos^2 x},$$

ce qui donne $h'(0) = 0$. Comme $h(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, on obtient donc, quand $x \to 0$,

$$h(x) = \frac{\pi}{4} + o(x).$$

4. Soit f dérivable en $x_0 \in I$. Donner l'équation générale de la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0.
L'équation de cette tangente est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
Remarque : Cela correspond au termes d'ordres 0 et 1 dans le développement limité de f au voisinage de x_0 qui est donné, quand $x \to x_0$ (on fait le changement de variable $h = x - x_0$), par

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

5 Introduction aux concepts du chapitre 5 : Différentielle seconde

Exercice 8. Différentielle de la différentielle
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable tel que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ soient aussi différentiables sur Ω.

1. Déterminer, en utilisant les formules du cours, pour tout $x_0 = (x, y)$, $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ et $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$, l'expression de $D_{x_0}(D_{x_0} f(h))(k)$.
On sait déjà que, pour tout $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$,
$$D_{x_0} f(h) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0).$$
La différentiabilité des dérivées partielles premières assure, pour tout $h \in \mathbb{R}^2$, la différentiabilité de $x \mapsto D_x f(h)$. Les dérivées partielles de cette fonction sont donc
$$\frac{\partial Df(h)}{\partial x}(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x)\right) = h_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x) + h_2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x)$$
et
$$\frac{\partial Df(h)}{\partial y}(x) = \frac{\partial}{\partial y}\left(h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x)\right) = h_1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x) + h_2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x).$$
On obtient donc, pour tout $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$,
$$\begin{aligned} D_{x_0}(D_{x_0} f(h))(k) &= \frac{\partial Df(h)}{\partial x}(x_0) k_1 + \frac{\partial Df(h)}{\partial y}(x_0) k_2 \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0) h_1 k_1 + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0) h_2 k_1 + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0) h_1 k_2 + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0) h_2 k_2. \end{aligned}$$

2. On note la différentielle seconde de f au point $x_0 \in \Omega$ (c'est-à-dire la différentielle de la différentielle) l'application $D^2_{x_0} f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(h, k) \mapsto D^2_{x_0} f(h, k) = D_{x_0}(D_{x_0} f(h))(k)$. Montrer qu'il s'agit d'une forme bilinéaire.
Comme il s'agit d'une différentielle (celle de la différentielle), alors l'application est linéaire par rapport à k. De plus, comme $D_{x_0} f$ est linéaire, $D^2_{x_0} f$ est donc aussi linéaire par rapport à h. Ainsi, il s'agit d'une forme bilinéaire. Une autre façon de le voir est de remarquer que
$$D^2_{x_0} f(h, k) = a h_1 k_1 + b h_1 k_2 + c h_2 k_1 + d h_2 k_2,$$
avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, qui est un exemple simple et typique d'application bilinéaire.

6 Introduction aux concepts du chapitre 6 : Extrema

Exercice 9. Un contre-exemple
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - xy^2$.

1. Montrer que $(0, 0)$ est le seul point où les dérivées partielles de f s'annulent simultanément. (on dit que $(0, 0)$ est un point critique de f)
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$\nabla_{(x,y)} f = (0, 0) \iff \left\{ \begin{array}{c} 2x - y^2 = 0 \\ -2xy = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} 2x - y^2 = 0 \\ x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{array} \right.$$
Si $x = 0$, alors la première équation donne $-y^2 = 0$ et donc $y = 0$. Si $y = 0$, la première équation donne $2x = 0$ donc $x = 0$. Ainsi, $(0, 0)$ est l'unique point où les dérivées partielles s'annulent simultanément.

2. Montrer que la restriction de f à toute droite passant par $(0,0)$ admet en $(0,0)$ un minimum local.
   L'équation de la droite verticale passant par $(0,0)$ est $x=0$. Comme, pour tout $y \in \mathbb{R}$,
   $$f(0,y)=0,$$
   f admet en tout point de la droite d'équation $x=0$ un minimum local (car f est constante sur cette droite).
   L'équation de toute droite oblique (non-verticale) passant par $(0,0)$ est $y=ax$ avec $a \in \mathbb{R}$. Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$g(x) := f(x,ax) = x^2 - x(ax)^2 = x^2 - a^2x^3,$$
   de telle sorte que g est dérivable de dérivées définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
   $$g'(x) = 2x - 3a^2x^2 \quad \text{et} \quad g''(x) = 2 - 6a^2x.$$
   On a alors $g'(0)=0$ (c'est évident car les dérivées partielles de f en $(0,0)$ sont nulles) et $g''(0) = 2 > 0$ donc $(0,0)$ est un minimum local de f sur la droite d'équation $y=ax$.
3. La fonction f admet-elle un minimum au point $(0,0)$?
   Ce n'est pas le cas. En effet, si on calcule la restriction de f àa la courbe $C := \{(t^2, 2t) : t \in \mathbb{R}\}$, on trouve, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   $$f(t^2, 2t) = -3t^4$$
   qui admet clairement un maximum local en $t=0$. Ainsi, f ne peut pas admettre de minimum local en $(0,0)$.