Université Claude Bernard Lyon 1 UE Analyse 4

L2, Semestre de Printemps 2024-2025

Exercices introductifs au notions vues en Cours Magistral

Ces exercices (rapides et simples, 10 minutes maximum par exercice) sont destinés à vous rafraîchir la mémoire sur des concepts vus les années/semestres précédents. Il vous sera demandé de les préparer au fur et à mesure de la progression du cours.

1 Introduction aux concepts du chapitre 1 : Normes

Exercice 1. Valeurs absolues et distances

1. Calculer $|4|$ et $|\sqrt{3}-2|$.
2. En utilisant le terme “distance", expliquer à quoi correspondent géométriquement $|x|$ et $|x-y|$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
3. Compléter $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| = 0 \iff$ ....
4. Compléter : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda x| =$................
5. Compléter : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x+y| \leq$................ . Comment s'appelle cette inégalité ?
6. Déterminer $A = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| = 1\}$ et $C = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| > 6\}$.

Exercice 2. Suites convergentes

1. Compléter : on dit que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ converge vers $x \in \mathbb{R}$ si : quelque soit $\varepsilon > 0$, à partir ...., les termes de la suite sont au plus à .... ε de x.
2. Compléter : $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x$ si et seulement si $\forall$....> 0, $\exists$....., $\forall k$....., $|x_k - \text{......}| <$......
3. Compléter : $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x$ si et seulement si $\forall$....> 0, $\exists$....., $\forall k$....., $x_k \in]....,....[$.
4. Faire un dessin illustrant cette propriété de convergence.

2 Introduction aux concepts du chapitre 2 : Topologie

Exercice 3. Intervalles

1. Déterminer l'intervalle ouvert centré en 1 et de rayon 1/3.
2. Soit $I =]0,1[$ et $x = 1/4$. Déterminer deux intervalles ouverts centrés en x et inclus dans I.
3. Soit $I =]0,1[$ et $x = 1/4$. Déterminer tous les intervalles ouverts centrés en x et inclus dans I. La réponse est-elle différente si $I = [0,1[$?
4. Soit $J = [0,1]$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $x_k = 1 - \frac{1}{k+1}$.
   a) Montrer que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset J$.
   b) Déterminer la limite de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
   c) Cette limite appartient-elle à J ?
   d) Reprendre les questions a)b)c) avec $J = [0,1[$.
5. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [1,2] \cup [5,6]$ qui converge vers x. A votre avis, est-ce que x appartient nécessairement à $[1,2] \cup [5,6]$? Même question avec $[1,2] \cap [1/2,3]$ et $]1,2[\cap]1/2,3[$.

Exercice 4. Sous-suites

1. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $x_k = (-1)^k$.
   a) Donner un intervalle fermé I contenant cette suite.
   b) Déterminer une sous-suite convergente de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Sa limite appartient-elle à I ?
2. Enoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.
3. A votre avis, pour quels types d'ensembles $A \subset \mathbb{R}$ toute suite de A admet-elle une sous-suite convergente dans A ? (on pourra se référer à l'exercice précédent)

3 Introduction aux concepts du chapitre 3 : Continuité

Exercice 5. Définition de la continuité et application

1. Compléter : soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et x_0 un point .... à I. Alors f est continue en x_0 si .... $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle .... de .... $2\delta > 0$ centré en x_0 de telle sorte que si x appartient à cet intervalle et à ...., $f(x)$ appartiennent à un intervalle .... de longueur 2ε centré en ....
2. Compléter (avec les notations précédentes) : f est continue en x_0 si
$$\forall \varepsilon > 0, \ldots\ldots\ldots\ldots, \forall x \in \ldots\ldots, |x - x_0| < \ldots\ldots \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \ldots\ldots$$
3. Montrer qu'une fonction linéaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, en utilisant la définition.

Exercice 6. Continuité et suites

1. Compléter : Soit $(x_k)_k$ la suite définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $x_k = 1 - \frac{1}{k+1}$. Alors on a, en notant E la fonction partie entière,
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad E(x_k) = \ldots..$$
En notant x la limite de $(x_k)_k$, on a donc $x = \ldots..$ et $E(x) = \ldots\ldots.$ Ainsi, il est clair que
$$\lim_{k\to+\infty} E(x_k) \neq E\left(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right).$$
Cela vient du fait que E ....
2. Compléter : si f est ...., on a, pour toute suite $(x_k)_k$ qui tend vers x
$$\lim_{k\to+\infty} f(x_k) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4 Introduction aux concepts du chapitre 4 : Différentiabilité

Exercice 7. Dérivabilité - définitions et applications

1. Compléter : soit I un intervalle .... et $x_0 \in I$. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est .... en x_0 si
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
et on note alors .... cette limite, appelée nombre dérivée de f en x_0.
2. Montrer que f est dérivable en x_0 si et seulement si, quand $h \to 0$,
$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h).$$
Que peut-on dire de l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h \mapsto f'(x_0)h$?
3. Donner le développement limité de en 0 de la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arctan(\cos x)$.
4. Soit f dérivable en $x_0 \in I$. Donner l'équation générale de la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0.

5 Introduction aux concepts du chapitre 5 : Différentielle seconde

Exercice 8. Différentielle de la différentielle
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable tel que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ soient aussi différentiables sur Ω.

1. Déterminer, en utilisant les formules du cours, pour tout $x_0 = (x, y)$, $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ et $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$, l'expression de $D_{x_0}(D_{x_0}f(h))(k)$.
2. On note la différentielle seconde de f au point $x_0 \in \Omega$ (c'est-à-dire la différentielle de la différentielle) l'application $D^2_{x_0}f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(h, k) \mapsto D^2_{x_0}f(h, k) = D_{x_0}(D_{x_0}f(h))(k)$. Montrer qu'il s'agit d'une forme bilinéaire.

6 Introduction aux concepts du chapitre 6 : Extrema

Exercice 9. Un contre-exemple
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - xy^2$.

1. Montrer que $(0, 0)$ est le seul point où les dérivées partielles de f s'annulent simultanément. (on dit que $(0, 0)$ est un point critique de f)
2. Montrer que la restriction de f à toute droite passant par $(0, 0)$ admet en $(0, 0)$ un minimum local.
3. La fonction f admet-elle un minimum au point $(0, 0)$?