Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre de Printemps 2024–2025**

L2 — UE : Analyse 4

Contrôle Terminal de Session 2 du 02/07/2025

Durée : 1h30

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.

Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées, et la rédaction la plus précise possible.

Exercice 1 Questions de cours (2 + 2 = 4 points)

1. Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, Ω ouvert, et $x_0 \in \Omega$. Si f est différentiable en x_0, montrer que pour tout $h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$,
$$D_{x_0} f(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i.$$
2. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que toute boule fermée de $\mathbb{R}^n$ pour $\|\cdot\|$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 Dérivée directionnelle (2 + 2 = 4 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f admet en $(0, 0)$ une dérivée suivant tout vecteur $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.
2. La fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 3 Laplacien infini (2 + 2 + 2 + 2 = 8 points)

Pour tout fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note respectivement $\nabla_{(x,y)} F$ et $D^2_{(x,y)} F$ le gradient et la différentielle seconde de F au point (x, y). De plus, on définit le laplacien infini de F, noté $\Delta_\infty F$, par la formule suivante :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \Delta_\infty F(x, y) = D^2_{(x,y)} F(\nabla_{(x,y)} F, \nabla_{(x,y)} F).$$

On considère aussi la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = x e^{x(y^2+1)}.$$

1. a) Montrer que le point $(-1, 0)$ est l'unique point critique de g sur $\mathbb{R}^2$.
   b) Déterminer la nature du point critique $(-1, 0)$ et calculer $\Delta_\infty g(-1, 0)$.
2. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé n'étant pas un point critique de F.
   a) On définit la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto F\left((x, y) + t\nabla_{(x,y)} F\right)$.
   Justifier que h est dérivable et montrer que $h'(0) = \|u\|_2^2$ où $u \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur à préciser.
   b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, quand $t \to 0$, on a
$$F\left(x + t\frac{\partial F}{\partial x}(x, y), y + t\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\right) = F(x, y) + t\|\nabla_{(x,y)} F\|_2^2 + \frac{t^2}{2} \Delta_\infty F(x, y) + o(t^2).$$

<u>Exercice 4</u> Fonctions à n variables (2 + 2 = 4 points)

On considère la fonction $f :]0, +\infty[^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in]0, +\infty[^n, \quad f(x_1, ..., x_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right).$$

1. Montrer que $x_0 \in]0, +\infty[^n$ est un point critique de f si et seulement s'il existe $\lambda > 0$ tel que $x_0 = (\lambda, ..., \lambda)$.
2. Déterminer le minimum global de f ainsi que le(s) point(s) où il est atteint.