Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre de Printemps 2024–2025**

L2 UE : Analyse 4

Contrôle Terminal de Session 2 du 02/07/2025

CORRECTION

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.

Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées, et la rédaction la plus précise possible.

Exercice 1 Questions de cours (2 + 2 = 4 points)

1. Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, Ω ouvert, et $x_0 \in \Omega$. Si f est différentiable en x_0, montrer que pour tout $h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$,
$$D_{x_0}f(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i.$$
Correction. Si f est différentiable en $x_0 \in \Omega$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, alors cela veut dire que la différentielle, qui est une application linéaire, $D_{x_0}f$ existe, ainsi que les dérivées partielles de f en x_0 qui sont données, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, par $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = D_{x_0}f(e_i)$, où $\{e_1, ..., e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, soit $h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$, alors, par linéarité, on a :
$$D_{x_0}f(h) = D_{x_0}f(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} D_{x_0}f(h_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} h_i D_{x_0}f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i.$$

2. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que toute boule fermée de $\mathbb{R}^n$ pour $\|\cdot\|$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
Correction. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, alors la boule fermée pour la norme $\|\cdot\|$, centrée en x et de rayon r est
$$\overline{B}_{\|\cdot\|}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leqslant r\}.$$
Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B}_{\|\cdot\|}(x, r)$ une suite qui converge vers $y \in \mathbb{R}^n$. Alors,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|x - y_n\| \leqslant r$$
et donc, en passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient, par continuité de la norme, $\|x-y\| \leqslant r$, donc $y \in \overline{B}_{\|\cdot\|}(x, r)$ et ainsi $\overline{B}_{\|\cdot\|}(x, r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 Dérivée directionnelle (2 + 2 = 4 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f admet en $(0, 0)$ une dérivée suivant tout vecteur $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\}$.
Correction. Soit $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\}$, alors on a
$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f((0, 0) + tv) - f(0, 0)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(ta, tb)}{t}.$$
Si $a = 0$, alors $\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(ta, tb)}{t} = \frac{0}{t} = 0$.
Si $a \neq 0$, alors
$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(ta, tb)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{t^2b^2 \ln|ta|}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} t \ln|t|b^2 + tb^2 \ln|a| = 0.$$
On a donc $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}^2$.

2. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Correction. Soit $y \neq 0$, alors on considère le point $(e^{-\frac{1}{y^2}}, y)$ qui tend vers $(0,0)$ quand $y \to 0$. De plus, on a

$$\forall y \neq 0, \quad f(e^{-\frac{1}{y^2}}, y) = 1 \neq 0.$$

Ainsi, f n'est pas continue en $(0,0)$, donc non-différentiable en ce point.

Exercice 3 Laplacien infini (2 + 2 + 2 + 2 = 8 points)

Pour tout fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on note respectivement $\nabla_{(x,y)}F$ et $D^2_{(x,y)}F$ le gradient et la différentielle seconde de F au point (x,y). De plus, on définit le laplacien infini de F, noté $\Delta_\infty F$, par la formule suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \Delta_\infty F(x,y) = D^2_{(x,y)}F(\nabla_{(x,y)}F, \nabla_{(x,y)}F).$$

On considère aussi la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = xe^{x(y^2+1)}.$$

1. a) Montrer que le point $(-1,0)$ est l'unique point critique de g sur $\mathbb{R}^2$.

Correction. g est deux fois différentiable sur $\mathbb{R}^2$ comme produit et composée de fonctions différentiables. On a donc

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = e^{x(y^2+1)}\left(1 + x(y^2+1)\right), \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2yx^2e^{x(y^2+1)}.$$

Ainsi, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique de g si et seulement si

$$\begin{cases} 1 + x(y^2+1) = 0 \\ yx^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + x(y^2+1) = 0 \\ x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \text{ et } 1 = 0 \\ \text{ou} \\ y = 0 \text{ et } 1 + x = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (-1,0),$$

donc $(-1,0)$ est bien l'unique point critique de g sur $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer la nature du point critique $(-1,0)$ et calculer $\Delta_\infty g(-1,0)$.

Correction. Comme, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = e^{x(y^2+1)}(y^2+1)(xy^2+x+2), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 2x^2e^{x(y^2+1)}(2xy^2+1)$$

et, par le théorème de Schwarz,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) = 2xye^{x(y^2+1)}(xy^2+x+2),$$

on obtient que la hessienne de f au point $(-1,0)$ est

$$H_f(-1,0) = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}$$

et dont les valeurs propres sont $e^{-1} > 0$ et $2e^{-1} > 0$. Ainsi, f admet un minimum local strict au point $(-1,0)$.

De plus, comme $(-1,0)$ est un point critique de g,

$$\Delta_\infty g(-1,0) = D_{(-1,0)}g(\nabla_{(-1,0)}g, \nabla_{(-1,0)}g) = D_{(-1,0)}g(0,0) = 0.$$

2. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé n'étant pas un point critique de F.

   a) On définit la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto F\big((x,y) + t\nabla_{(x,y)}F\big)$.

   Justifier que h est dérivable et montrer que $h'(0) = \|u\|_2^2$ où $u \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur à préciser.

   Correction. On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\nabla_{(x,y)}F \neq 0$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$h(t) = F\left(x + t\frac{\partial F}{\partial x}(x,y), y + t\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right),$$

   qui est une fonction dérivable comme composée de fonctions dérivables, F étant différentiable et $t \mapsto x + t\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ ainsi que $t \mapsto y + t\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ sont affines donc dérivables sur $\mathbb{R}$, et donc, par composition, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$h'(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\frac{\partial F}{\partial x}\left(x + t\frac{\partial F}{\partial x}(x,y), y + t\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\frac{\partial F}{\partial y}\left(x + t\frac{\partial F}{\partial x}(x,y), y + t\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right),$$

   donc, pour $t = 0$,

$$h'(0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)^2 = \|\nabla_{(x,y)}F\|_2^2,$$

   d'où $u = \nabla_{(x,y)}F$.

   b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, quand $t \to 0$, on a

$$F\left(x + t\frac{\partial F}{\partial x}(x,y), y + t\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right) = F(x,y) + t\|\nabla_{(x,y)}F\|_2^2 + \frac{t^2}{2}\Delta_\infty F(x,y) + o(t^2).$$

   Correction. Comme F est deux fois différentiable, on a le développement de Taylor-Young suivant, au point (x,y), quand $t\nabla_{(x,y)}F \to 0$, c'est-à-dire quand $t \to 0$ puisque $\nabla_{(x,y)}F \neq 0$ est fixé,

$$\begin{aligned}
&F\left(x + t\frac{\partial F}{\partial x}(x,y), y + t\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)\\
&= F\big((x,y) + t\nabla_{(x,y)}F\big)\\
&= F(x,y) + D_{(x,y)}F(t\nabla_{(x,y)}F) + \frac{1}{2}D^2_{(x,y)}F(t\nabla_{(x,y)}F, t\nabla_{(x,y)}F) + o(\|t\nabla_{(x,y)}F\|_2^2)\\
&= F(x,y) + tD_{(x,y)}F(\nabla_{(x,y)}F) + \frac{t^2}{2}D^2_{(x,y)}F(\nabla_{(x,y)}F, \nabla_{(x,y)}F) + o(t^2)\\
&= F(x,y) + t\|\nabla_{(x,y)}F\|_2^2 + \frac{t^2}{2}\Delta_\infty F(x,y) + o(t^2).
\end{aligned}$$

<u>Exercice 4</u> Fonctions à n variables (2 + 2 = 4 points)

On considère la fonction $f :]0,+\infty[^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in]0,+\infty[^n, \quad f(x_1,\ldots,x_n) = \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right).$$

1. Montrer que $x_0 \in]0,+\infty[^n$ est un point critique de f si et seulement s'il existe $\lambda > 0$ tel que $x_0 = (\lambda, \ldots, \lambda)$.

   Correction. Comme f est une fonction deux fois différentiable sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ comme produit et sommes de fonctions différentiables donc les dénominateurs ne s'annulent pas, on a, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, et pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_i^2}\sum_{k=1}^n x_k,$$

et ainsi, $x_0 \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ est un point critique de f si et seulement si

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad x_i^2 = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}},$$

si et seulement s'il existe $\lambda > 0$ tel que $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$, $x_i = \lambda$. Notons qu'on a alors

$$\lambda^2 = \frac{n\lambda}{\frac{n}{\lambda}} = \lambda^2,$$

ce qui ne donne pas d'information supplémentaire sur λ. De plus,

$$f(\lambda, ..., \lambda) = n\lambda \times \frac{n}{\lambda} = n^2.$$

2. Déterminer le minimum global de f ainsi que le(s) point(s) où il est atteint.

Correction.

Méthode qui aboutit : Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. On pose $X = (\sqrt{x_1}, ..., \sqrt{x_n})$ et $Y = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, ..., \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$, alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne

$$n = \left|\sum_{k=1}^n X_k Y_k\right| \leqslant \|X\|_2 \|Y\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k}\sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}},$$

et on obtient donc que

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \quad f(x) \geq n^2,$$

avec égalité si et seulement si X et Y sont liés, c'est-à-dire s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $X = \alpha Y$, c'est-à-dire que

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \sqrt{x_k} = \frac{\alpha}{\sqrt{x_k}} \iff x_k = \sqrt{\alpha},$$

si et seulement si $x = (\sqrt{\alpha}, ..., \sqrt{\alpha})$. D'après la question 1, le minimum global, qui vaut n^2, est atteint si et seulement si x est un point critique de f.

Méthode qui n'aboutit pas (mais que l'on a envie d'utiliser au premier abord) : Puisque f est deux fois différentiable, on a, pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = -\frac{1}{x_i^2} + \frac{2}{x_i^3}\sum_{k=1}^n x_k - \frac{1}{x_i^2},$$

et

$$\forall (i,j) \in \{1, ..., n\}^2, i \neq j, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = -\frac{1}{x_j^2} - \frac{1}{x_i^2}.$$

On obtient donc, pour tout $\lambda > 0$,

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\lambda, ..., \lambda) = \frac{2n-2}{\lambda^2}, \quad \text{et} \quad \forall (i,j) \in \{1, ..., n\}^2, i \neq j, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\lambda, ..., \lambda) = -\frac{2}{\lambda^2}.$$

La hessienne H de f au point $(\lambda, ..., \lambda)$ a donc des coefficients $\frac{2n-2}{\lambda^2}$ sur la diagonale et $-\frac{2}{\lambda^2}$ partout ailleurs. On a donc $\mathrm{rg}\left(H - \frac{2n}{\lambda^2} I_n\right) = 1$ ce qui veut dire, par le théorème du rang, que $\frac{2n}{\lambda^2}$ est valeur propre de H avec multiplicité $n - 1$. Notons μ la dernière valeur propre, alors on a, par invariance de la trace,

$$\mathrm{Tr}(H) = (n-1)\frac{2n}{\lambda^2} + \mu = \frac{n(2n-2)}{\lambda^2}.$$

Ainsi, $\mu = 0$ et on ne peut pas conclure.