
Contrôle Terminal du Mardi 13/05/2025Durée : 2 heures

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.

Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées, et la rédaction la plus précise possible.

Exercice 1 Questions de cours (2 + 2 = 4 points)

1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $x_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$. Montrer que si f est différentiable en x_0 , alors f est continue en x_0 .
2. Soit $\{K_i\}_{i \in I}$, $I \neq \emptyset$, une famille quelconque de compacts de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $K := \bigcap_{i \in I} K_i$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 Différentiabilité (1 + 1 + 2 = 4 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$.
2. Si f est différentiable en $(0, 0)$, déduire de la question précédente l'expression de sa différentielle.
3. Montrer que f est différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 3 Taylor-Young, limite et composée (2 + 0.5 + 1.5 = 4 points)

Soit $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $f : I^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie pour tout $(x, y) \in I^2$ par $f(x, y) = \frac{e^x}{\cos y}$.

1. Justifier que f est deux fois différentiable sur I^2 et déterminer le développement de Taylor-Young de f à l'ordre 2 en $(0, 0)$.
2. En déduire la valeur de $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{e^x - (1 + x) \cos y}{(x^2 + y^2) \cos y}$.
3. Soit $u \in C^2(\mathbb{R})$ telle que $u(\mathbb{R}) \subset I$ et $u'(\mathbb{R}) \subset I$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ un point critique de u tel que $u(t_0) = 0$. On définit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = f(u(t), u'(t)).$$

Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi'(t_0)$.

Tournez la page, il y a encore deux exercices ! →

Exercice 4 Extrema dans le plan (0.5 + 1 + 0.5 + 1 + 0.5 + 0.5 = 4 points)

Soient $y_m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$, $y_M = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et

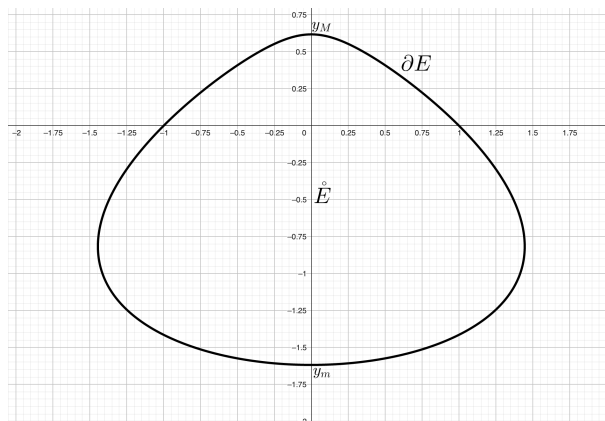
$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y^3 - 2y + 1\} \cap ([-2, 2] \times [y_m, y_M]).$$

On admet que

- l'intérieur de E est $\overset{\circ}{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y^3 - 2y + 1\} \cap (]-2, 2[\times]y_m, y_M[)$;
- le bord de E est $\partial E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^3 - 2y + 1\} \cap ([-2, 2] \times [y_m, y_M])$;
- les ordonnées extrémales de E sont données par

$$\min_{(x,y) \in \partial E} y = \min_{(0,y) \in \partial E} y = y_m \quad \text{et} \quad \max_{(x,y) \in \partial E} y = \max_{(0,y) \in \partial E} y = y_M.$$

La figure ci-dessous permet de se faire une idée de la forme de E .



Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^2 y + 2y^2 - y^4.$$

Le but de cet exercice est d'étudier les extrema de f sur E .

1. Montrer que f admet un maximum et un minimum sur E .
2. Dans cette question, on étudie f sur $\overset{\circ}{E}$.
 - a) Montrer que les seuls points critiques de f sur $\overset{\circ}{E}$ sont $(0, 0)$ et $(0, -1)$.
 - b) Etudier la nature du point critique $(0, -1)$.
 - c) Montrer que f admet un point selle en $(0, 0)$.

Indication : on pourra par exemple calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x, x^3)$.

3. Déterminer les extrema de f sur ∂E .

Indication : pensez à la substitution !

4. En déduire le minimum et la maximum de f sur E ainsi que les points où ces valeurs sont atteintes.

Exercice 5 Extrema d'une fonction à n variables (2 + 2 = 4 points)

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On considère la fonction $f :]0, +\infty[^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n x_i.$$

1. Montrer que l'unique point critique de f est $x_0 = \frac{1}{2(n+1)}(1, \dots, 1)$.
2. Montrer que f admet en x_0 un minimum local strict.
3. **BONUS (1 point) :** Montrer que x_0 est l'unique point où f admet son minimum global.