Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre de Printemps 2024–2025**

L2 — UE : Analyse 4

Contrôle Partiel du Vendredi 14/03/2025

Durée : 2h

CORRECTION / REMARQUES

Remarques générales.

- Il faut toujours introduire les variables/paramètres avant de les utiliser (exemples : "soit $x \in \mathbb{R}$", "soit $k \in \mathbb{N}$", etc.), et faire en sorte que l'on comprenne pour quels points de raisonnements vous les utilisez.
- Evitez les phrases qui n'ont pas de sens : tout objet mathématique a une définition qui lui est propre, et il faut en tenir compte (exemple : si $B \subset \mathbb{R}^2$, on n'écrira pas qu'un certain réel x de B appartient à $\mathbb{R}^2$).
- Toute assertion doit être justifiée (un point qui appartient à un certain ensemble, etc.).

Exercice 1 Questions de cours (3 + 1 = 4 points)

Remarque. De manière générale, pour la question de cours, se contenter des notes de cours sans venir en CM ne permet souvent pas de comprendre d'éventuelles subtilités, puisqu'elles sont souvent spécifiées à l'orale ou au tableau.

1. Soit $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction continue et K un compact de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}^p$.

   Correction : Soit $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset f(K)$. Montrons que $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $f(K)$. On sait qu'il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $y_k = f(x_k)$. Comme K est compact, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente vers $x \in K$. La suite $(f(x_{\varphi(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Comme f est continue sur E, $(f(x_{\varphi(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $y := f(x) \in f(K)$. On en déduit donc que $f(K)$ est compact.

   Remarques. Quand vous avez une preuve à connaître, il faut évidemment la comprendre en apprenant les définitions qui correspondent (ici celle de la compacité). L'idée n'est PAS de connaître les preuves par coeur, mais d'être capable de les retrouver, simplement en utilisant les définitions et des propriétés simples.

2. Montrer que l'union d'une famille quelconque d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

   Correction : Soit $(\Omega_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ une famille quelconque d'ouverts de $\mathbb{R}^n$. Considérons l'ensemble $\Omega = \bigcup_k \Omega_k$. Soit $x \in \Omega$, alors il existe k tel que $x \in \Omega_k$. Comme Ω_k est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \Omega_k \subset \Omega$. Ainsi Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

   Remarques.

   - Il est ici question d'une famille quelconque d'ouverts, donc ni forcément finie, ni dénombrable. Attention à ne pas dire que $k \in \{1, ..., n\}$ ou $k \in \mathbb{N}$.
   - Attention à l'ordre des arguments ! Bien connaître son cours permet de ne pas se perdre (que montre-t-on ? quels propriétés des objets utilise-t-on ?). On prend un point x quelconque dans une union. Ainsi, il est nécessairement contenu dans un des ensembles Ω_k. Comme celui-ci est ouvert, il existe une boule ouverte (donc un rayon $r > 0$) centrée en x contenu dans Ω_k et ainsi, comme Ω_k est inclus dans Ω, cette boule est incluse aussi dans Ω.

Exercice 2 **Limite d'une fonction à paramètres (4 points)**
Déterminer pour quelles valeurs de $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^*)^2$ la limite en $(0,0)$ de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, \quad f(x,y) = \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2}$$

existe, et préciser dans ce cas la valeur de cette limite.

Correction : Deux méthodes différentes sont possibles.

Méthode 1 : en coordonnées polaires. On passe en coordonnées polaires. Soit $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, alors on a

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^\alpha \cos^\alpha \theta r^\beta \sin^\beta \theta}{r^2} = r^{\alpha+\beta-2}\cos^\alpha\theta\sin^\beta\theta.$$

Si $\alpha + \beta > 2$, alors on a $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leqslant r^{\alpha+\beta-2} \to 0$ quand $r \to 0$, et donc, par comparaison, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Si $\alpha + \beta = 2$, alors on a $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos^\alpha\theta\sin^\beta\theta$ qui est non-constant par rapport à θ, valant 0 si $\theta = 0$ et $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\alpha+\beta} \neq 0$ si $\theta = \frac{\pi}{4}$, et donc f n'a pas de limite en $(0,0)$.

Comme $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on ne peut pas avoir $\alpha + \beta < 2$.

Méthode 2 : en coordonnées cartésiennes. Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y)| = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2} \leqslant \frac{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1}.$$

Ainsi, si $\frac{\alpha+\beta}{2} - 1 > 0$, c'est-à-dire $\alpha+\beta > 2$, on a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1} = 0$ et donc, par comparaison, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Si $\alpha + \beta \leqslant 2$, on voit que comme α et β sont des entiers non-nuls, on ne peut que avoir $\alpha + \beta = 2$, alors

$$\forall x \neq 0, \quad f(x,0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x,x) = \frac{1}{2x^{2-\alpha-\beta}} = \frac{1}{2}.$$

Comme $(x,x) \to (0,0)$ quand $x \to 0$, et $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = \dfrac{1}{2} \neq 0$, on en déduit que f n'a pas de limite en $(0,0)$.

Remarques. C'est un exercice de la Feuille de TD 3.

- Il n'était pas question du tout de continuité, donc expliquer que f est continue en dehors de $(0,0)$ n'avait aucun intérêt.
- Comme rappelé maintes fois en CM/TD, il ne suffit pas de calculer $f(x,x)$ et montrer que cette quantité tend vers 0 quand $x \to 0$ pour en conclure la limite. Ce type de calcul est utile pour montrer que f n'a PAS de limite (par exemple si $f(x,x) \to 1/2$ et $f(x,0) \to 0$).
- Pour montrer qu'une quantité tend vers 0 quand $(x,y) \to (0,0)$, le mieux est de majorer la valeur absolue de cette quantité par une expression (positive, donc!) qui tend vers 0 uniformément en (x,y). Si vous majorez par quelque chose qui tend vers 1 ou $+\infty$, cela ne donne pas d'information sur la limite (on veut utiliser le théorème des gendarmes).
- Attention à bien expliquer que vous trouvez 0 comme limite "par encadrement", puisque généralement on calcule la limite d'un majorant (et pas celle de la fonction directement).
- Si vous passez par les coordonnées polaires, vous devez bien expliquer à quels ensembles appartiennent r et θ et, dans le cas où l'on cherche une limite nulle, majorer $|f(r\cos(\theta, r\sin\theta)|$ par une quantité $g(r)$ indépendante de θ et qui tend vers 0 quand $r \to 0$.

Exercice 3 **Topologie (2 + 2 = 4 points)**

Remarques. Attention à ne pas confondre les méthodes pour montrer qu'un ensemble est fermé ou non-fermé.

- Pour montrer que F est fermé, on prend une suite convergente quelconque $(x_k)_k \subset F$ (tous ces termes sont dans F) et on montre que sa limite appartient nécessairement à F.
- Pour montrer que F n'est pas fermé, on montre qu'il existe une suite d'éléments de F dont la limite n'appartient pas à F.

On considère les parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-1| + |y+2| \leqslant 1\}, \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}.$$

1. L'ensemble A est-il ouvert ? fermé ? aucun des deux ? Même question pour l'ensemble B.

   Correction : On remarque que $A = \overline{B}_{\|\cdot\|_1}((1,-2),1)$, et donc A est un fermé de $\mathbb{R}^2$ comme boule fermée de $\mathbb{R}^2$.

   On peut écrire $B = f^{-1}(]0,+\infty[)$ avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x$ qui est une fonction continue. Comme $]0,+\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, on en déduit que B est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

   Alternativement. On remarque que $B = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ qui est un ouvert comme produit cartésien d'ouverts.

   Remarques.
   - Si vous utilisez la caractérisation séquentielle des fermés, il faut évidemment rédiger correctement (cf. Feuille de TD 2).
   - Si vous utilisez la caractérisation d'un ouvert/fermé de $\mathbb{R}^2$ par image réciproque, il faut évidemment choisir une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pour que l'image réciproque soit incluse dans $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que $A \cap B$ n'est ni ouvert, ni fermé.

   Correction : On commence par remarquer que

   $$A \cap B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } |x-1| + |y+2| \leqslant 1\}.$$

   Montrons que $A \cap B$ n'est pas un ouvert. En effet, on a :
   - $(1,-1) \in A \cap B$ car $1 > 0$ et $|1-1| + |-1+2| = 1 \leqslant 1$;
   - Pour tout $r > 0$, alors le point $M = \left(1, -1 + \frac{r}{2}\right)$ est tel que
     a) $M \notin A \cap B$ car $|1-1| + |-1 + \frac{r}{2} + 2| = 1 + \frac{r}{2} > 1$;
     b) $M \in B((1,-1),r)$ car $\sqrt{(1-1)^2 + \left(-1+1-\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{r}{2} < r$;

     et ainsi, $\forall r > 0$, $B((1,-1),r) \not\subset A \cap B$.

   Montrons que $A \cap B$ n'est pas un fermé en considérant la suite de points $\{(\frac{1}{k},-2)\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ qui vérifie :
   - Pour tout $k \geq 1$, $(\frac{1}{k},-2) \in A \cap B$ car $\frac{1}{k} > 0$ et $\left|\frac{1}{k} - 1\right| + |-2+2| = 1 - \frac{1}{k} \leqslant 1$;
   - La limite de cette suite est $(0,-2) \notin A \cap B$ car son abscisse est nulle.

   Ainsi, $A \cap B$ n'est pas un fermé d'après la caractérisation séquentielle des fermés.

   Remarques.
   - Faire un dessin au brouillon était évidemment nécessaire.
   - Il faut tout justifier, en particulier pourquoi certains points appartiennent à des ensembles ou non.
   - Attention : n'est pas parce que B n'est pas fermé (resp. ouvert) que $A \cap B$ n'est pas fermé (resp. ouvert).

Exercice 4 **Normes (1 + 1 + 1 + 1 = 4 points)**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \geq 1$, on définit l'application $N_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad N_p(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1. On admet que, pour tout $p \geq 1$, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $N_p(x+y) \leqslant N_p(x) + N_p(y)$.
Soit $p \geq 1$. Montrer que N_p est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
Correction : Il suffit de vérifier les trois axiomes manquants :
   (a) Positivité : Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $|x_k| \geq 0$ et donc $N_p(x) \geq 0$.

   (b) Séparation : Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a
$$N_p(x) = 0 \iff \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p = 0 \iff \forall k \in \{1, ..., n\}, |x_k| = 0 \iff x = (0, ..., 0).$$
   (c) Homogénéité : Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
$$N_p(\lambda x) = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \sum_{k=1}^{n} |\lambda|^p |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = (|\lambda|^p)^{\frac{1}{p}} N_p(x) = |\lambda| N_p(x).$$
   Comme N_p vérifie aussi l'inégalité triangulaire, on en déduit que N_p est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

   Remarques. La séparation n'est pas toujours bien rédigée alors que c'est quelque chose d'assez trivial. Il s'agit d'une équivalence et cela repose très souvent sur le fait qu'une somme de quantités positives est nulle si et seulement si (équivalence, donc) toutes ces quantités sont nulles.

2. Soit $p \geq 1$. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_\infty \leqslant N_p(x) \leqslant n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty.$$
Correction : Soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors, pour un certain $j \in \{1, ..., n\}$,
$$\|x\|_\infty = |x_j| = (|x_j|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = N_p(x).$$
De plus, on a, par propriété du max,
$$N_p(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \|x\|_\infty^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_\infty \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty.$$
Remarques. Attention à ce que les inégalités que vous écrivez soient justifiées ou assez bien écrites pour que l'on comprenne qu'elles sont triviales.

3. En déduire des réels $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ tels que, pour tout $p \geq 1$,
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad B_p(x, 1) \subset B_{\|\cdot\|_\infty}(x, \lambda) \subset B_p(x, \mu).$$
Correction : Soit $y \in B_p(x, 1)$, alors on a $N_p(y - x) < 1$. Or on sait que $\|y - x\|_\infty \leqslant N_p(y - x)$, et ainsi $\|y - x\|_\infty < 1$ ce qui veut dire que $y \in B_{\|\cdot\|_\infty}(x, 1)$. On a donc $\lambda = 1$.
De même, si $y \in B_{\|\cdot\|_\infty}(x, 1)$, alors $\|y - x\|_\infty < 1$, mais comme $N_p(y - x) \leqslant n^{\frac{1}{p}} \|y - x\|_\infty$, on obtient que $N_p(y - x) < n^{\frac{1}{p}}$, et donc $y \in B_p(x, n^{\frac{1}{p}})$, d'où $B_{\|\cdot\|_\infty}(x, 1) \subset B_p(x, n^{\frac{1}{p}})$ et donc $\mu = n^{\frac{1}{p}}$. Pour résumer, on a montré que
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad B_p(x, 1) \subset B_{\|\cdot\|_\infty}(x, 1) \subset B_p(x, n^{\frac{1}{p}}).$$
Remarques. Ce type de raisonnement n'est pas très difficile, il faut juste bien traduire l'appartenance aux boules et utiliser proprement les inégalités de la question précédente.

4. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Déterminer $\lim_{p \to +\infty} N_p(x)$.
Correction : On utilise la double inégalité montrée à la question 2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Comme, pour tout $n \geq 1$,
$$\lim_{p \to +\infty} n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty = \|x\|_\infty,$$
on en déduit, par le théorème des gendarmes, que
$$\lim_{p \to +\infty} N_p(x) = \|x\|_\infty.$$

Exercice 5 Image réciproque d'un compact par une application continue (1 + 3 = 4 points)

1. Donner un exemple de fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et de compact K de $\mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(K)$ ne soit pas un compact de $\mathbb{R}$.
Correction : Il suffit de prendre la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$ qui est continue. En choisissant $K = [-1, 1]$, on a que $f^{-1}([-1, 1]) = \mathbb{R}$, mais $\mathbb{R}$ n'est pas un compact de $\mathbb{R}$.
Remarques. On rappelle que $f^{-1}(K)$ n'est pas en général l'image de K par la fonction réciproque f^{-1}, puisque celle fonction n'existe pas toujours, alors que $f^{-1}(K)$ oui (ce sont les antécédents des éléments de K par f). Rappel : dans ce contexte,
$$f^{-1}(K) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in K\}.$$

2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) $\forall M > 0$, $\exists R > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 > R \Rightarrow |f(x)| > M$.
   (ii) Pour toute partie bornée B de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(B)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.
   (iii) Pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.

Correction. Montrons ces équivalences par implications successives.

• **(i)⇒(ii).** Soit B un ensemble borné de $\mathbb{R}$, alors il existe $M > 0$ tel que pour tout $y \in B$, $|y| \leqslant M$. Soit R donné à partir de M dans (i). Alors on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 > R \Rightarrow |f(x)| > M$. Maintenant, soit $x \in f^{-1}(B)$, alors $f(x) \in B$ et donc $|f(x)| \leqslant M$. Pour un tel x, il est donc impossible que $\|x\|_2 > R$ puisque sinon on aurait, d'après (ii), $|f(x)| > M$. On en déduit donc qu'il existe $R > 0$ tel que, pour tout $x \in f^{-1}(B)$, $\|x\|_2 < R$ et donc $f^{-1}(B)$ est borné dans $\mathbb{R}^n$.

• **(ii)⇒(iii)** est évident. En effet, si K est compact, alors K est fermé et borné d'après le théorème de Heine. Par (ii) $f^{-1}(K)$ est donc bornée car K est borné, et comme f est continue et K est fermé, on sait que $f^{-1}(K)$ est un fermé. Ainsi $f^{-1}(K)$ est un compact de $\mathbb{R}^n$ d'après le théorème de Heine.

• **(iii)⇒(i).** Par l'absurde, supposons (iii) vrai et (i) faux *(puisque montrer (iii)⇒(i) revient à montrer non(iii) ou (i) qui est la négation de (iii) et non(i))*, c'est-à-dire que :
- pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$;
- $\exists M > 0$, $\forall R > 0$, $\exists x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 > R$ et $|f(x)| \leqslant M$.

Ainsi il existe $M > 0$ et une suite $(x_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ telle que, en appliquant le deuxième point ci-dessus à $R = k$, $\|x_k\| \geq k$ et $|f(x_k)| \leqslant M$. Alors $f^{-1}([-M, M])$ contient la suite $(x_k)_k$ et celle-ci n'est pas bornée puisque, par comparaison $\lim_{k \to +\infty} \|x_k\|_2 = +\infty$, donc $f^{-1}([-M, M])$ n'est pas compacte alors que f est continue, ce qui est impossible par le premier point que l'on a supposé.

Remarques. C'est une question relativement difficile, mais l'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ était facile à démontrer.