

- On peut réécrire cette définition en utilisant la notion de boule ouverte associée à la norme  $\|\cdot\|$  de la façon suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq N, \quad x_k \in B_{\|\cdot\|}(x, \varepsilon).$$

On peut aussi dire : “quelque soit le voisinage (cf. chapitre suivant, mais une boule ouverte suffit) de  $x$  – aussi petit que l’on veut au sens de l’inclusion –, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans ce voisinage.”



**Proposition 1.25 (Convergence des coordonnées d’une suite).** La suite  $(x_k)_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)_k \subset \mathbb{R}^n$  converge vers  $x = (x^1, \dots, x^n)$  pour  $\|\cdot\|_2$  si et seulement si  $(x_k^i)_k$  converge vers  $x^i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  pour  $\|\cdot\|$ .

**Remarque 1.26.** On peut choisir n’importe quelle autre norme que  $\|\cdot\|_2$  dans la proposition précédente, car toutes les normes sont équivalentes.

*Démonstration.* On suppose que  $(x_k)_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)_k \subset \mathbb{R}^n$  converge vers  $x = (x^1, \dots, x^n)$  pour  $\|\cdot\|_2$ . Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq N, \quad \|x_k - x\|_2 < \varepsilon.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , alors, en appliquant l’assertion précédente à  $\varepsilon$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $k \geq N$ ,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad |x_k^i - x^i| = \sqrt{(x_k^i - x^i)^2} \leq \|x_k - x\|_2 < \varepsilon.$$

Cela prouve que  $(x_k^i)_k$  converge vers  $x^i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Réciproquement, supposons que  $(x_k^i)_k$  converge vers  $x^i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , alors, pour chacun de ces  $i$ , on a

$$\forall \varepsilon_i > 0, \quad \exists N_i \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq N_i, \quad |x_k^i - x^i| < \varepsilon_i.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , alors en appliquant les  $n$  assertions précédentes à  $\varepsilon_i = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ , on trouve qu’il existe  $N = \max_i N_i$  tel que pour tout  $k \geq N$ , on a

$$\|x_k - x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n (x_k^i - x^i)^2 < \sum_{i=1}^n \left( \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \right)^2 = n \frac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2,$$

et donc  $\|x_k - x\|_2 < \varepsilon$ , ce qui prouve que  $(x_k)_k$  converge vers  $x$ . □

**Remarque 1.27.** Plusieurs remarques concernant cette partie du cours :

- Tout  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ )-espace vectoriel de dimension fini est normable (on peut y définir une norme). En effet, un tel espace admet toujours une base  $\{e_i\}_i$ . Ainsi, on peut donc définir

$$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, x_i \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}), \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

qui est une norme sur cet espace (même preuve que pour la norme 1 classique).

- Exemple de norme sur un espace de dimension infini : soient  $a < b$  et  $C([a, b], \mathbb{R})$  l’espace des fonctions continues de l’intervalle  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors l’application  $\|\cdot\|_1$  définie par

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$$

est une norme sur  $C([a, b], \mathbb{R})$ .

## 2 Arpenter les lieux : éléments de topologie dans l'espace Euclidien $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$

Dans ce chapitre, on se restreint (sauf mention du contraire) à la norme euclidienne  $\|\cdot\|_2$  définie par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_2 = \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

### 2.1 Ouverts et fermés de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$

**Définition 2.1 (Ouverts et fermés de  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ ).** On munit  $\mathbb{R}^n$  de la norme  $\|\cdot\|_2$ , alors :

- on dit que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  si

$$\forall x \in \Omega, \quad \exists r > 0, \quad B(x, r) \subset \Omega.$$

- on dit que  $F \subset \mathbb{R}^n$  est un fermé de  $\mathbb{R}^n$  si  $\mathbb{R}^n \setminus F$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

**Remarque 2.2 (Ensemble non-ouvert).** On remarque que  $A \subset \mathbb{R}^n$  n'est pas un ouvert si et seulement si

$$\exists x \in A, \quad \forall r > 0, \quad B(x, r) \not\subset A.$$

Cela ne veut PAS dire que  $A$  est fermé ! Il existe des ensembles ni ouverts, ni fermés.

**Remarque 2.3 (Indépendance par rapport à la norme).** Comme toutes les normes sont équivalentes sur  $\mathbb{R}^n$ , la notion d'ouvert ne dépend pas de la norme choisie (norme équivalentes implique inclusion de boules ouvertes). Ainsi, la notion de fermé ne dépend pas non plus de la norme.



**Exercice :** Soit  $E$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que si  $E$  est ouvert, alors  $E = \mathbb{R}^n$ .

**Correction.** On sait déjà que  $E \subset \mathbb{R}^n$ .

Montrons que  $\mathbb{R}^n \subset E$ . Comme  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $0 \in E$ . Comme  $E$  est ouvert, alors il existe  $r > 0$  tel que  $B(0, r) \subset E$ . Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ , alors il existe  $y \in B(0, r)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $x = \lambda y$ . Comme  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $x = \lambda y \in E$ , et donc  $\mathbb{R}^n \subset E$ , ce qui permet de conclure l'égalité recherchée.

**Proposition 2.4 (Caractérisation séquentielle d'un fermé).** Une partie  $F$  est fermé si et seulement si la limite de toute suite convergente d'éléments de  $F$  appartient à  $F$ .

*Démonstration.* Raisonnons par contraposée et montrons ainsi que

$$F \text{ n'est pas fermé} \iff \exists (x_k)_k \subset F \text{ telle que } \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x \notin F.$$

Supposons que  $F$  n'est pas fermé, alors  $F^c$  n'est pas ouvert et donc il existe  $x \in F^c$  telle que pour  $r > 0$ ,  $B(x, r) \not\subset F$ . On fixe une suite  $(\varepsilon_k)_k \rightarrow 0$  de nombres strictement positifs tels que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $B(x, \varepsilon_k) \not\subset F$ . On a donc :  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\exists x_k \in B(x, \varepsilon_k) \cap F$ . La suite  $(x_k)_k$  ainsi construite est une suite d'éléments de  $F$  qui vérifie,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\|x_k - x\| < \varepsilon_k \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$ , et donc converge vers  $x \notin F$ .

Réciproquement, supposons qu'il existe  $(x_k)_k \subset F$  qui converge vers  $x \notin F$ . Ainsi  $x \in F^c$  et, comme  $(x_k)_k$  tend vers  $x$ ,

$$\forall r > 0, \exists k \in \mathbb{N}, \|x_k - x\|_2 < r.$$

On a ainsi,  $\forall r > 0, B(x, r) \not\subset F^c$ , puisque cette boule contient  $x_k \in F$ . Ainsi,  $F^c$  n'est pas un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et donc  $F$  n'est pas un fermé de  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Proposition 2.5 (Réunions et intersections d'ouverts et de fermés).** On a :

1. Les ensembles  $\mathbb{R}^n$  et l'ensemble vide  $\emptyset$  sont à la fois ouverts et fermés.
2. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\{x\}$  est un fermé.
3. La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est un ouvert.
4. L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.
5. L'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé.
6. La réunion d'un nombre fini de fermés est un fermé.

*Démonstration.* 1. Il est clair que si  $(x_k)_k \subset \mathbb{R}^n$  converge vers  $x$ , alors  $x \in \mathbb{R}^n$ . Cela prouve que  $\mathbb{R}^n$  est fermé, et donc que son complémentaire  $\emptyset$  est ouvert. De même, soit  $x \in \mathbb{R}^n$ , alors  $B(x, 1) \subset \mathbb{R}^n$  et donc  $\mathbb{R}^n$  est ouvert. Il en découle que son complémentaire  $\emptyset$  est un fermé.

2. Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ , alors soit  $(x_k)_k$  une suite de  $\{x\}$ . Alors on a évidemment  $\forall k \in \mathbb{N}, x_k = x$ . Ainsi, si  $(x_k)_k$  converge, c'est vers  $x \in \{x\}$ . Il en découle que  $\{x\}$  est fermé.
3. Soit  $(\Omega_k)_k \subset \mathbb{R}^n$  une famille quelconque (non-nécessairement dénombrable) d'ouverts de  $\mathbb{R}^n$ . Considérons l'ensemble  $\Omega = \bigcup_k \Omega_k$ . Soit  $x \in \Omega$ , alors il existe  $k$  tel que  $x \in \Omega_k$ . Comme  $\Omega_k$  est un ouvert, il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset \Omega_k \subset \Omega$ . Ainsi  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .
4. Soit  $\{\Omega_1, \dots, \Omega_p\} \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble fini d'ouverts. Considérons  $\Omega = \bigcap_{k=1}^p \Omega_k$ . Soit  $x \in \Omega$ , alors  $x \in \Omega_k$  pour tout  $1 \leq k \leq p$ . Pour chaque  $k$ , il existe  $r_k > 0$  tel que  $B(x, r_k) \subset \Omega_k$ . Ainsi, en choisissant  $r = \min_k r_k > 0$  – car c'est le minimum sur un ensemble fini de nombres strictement positifs –, on obtient que  $B(x, r) \subset \Omega_k$  pour tout  $k$  et donc  $B(x, r) \subset \Omega$ . Ainsi  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .
5. Soit  $(F_k)_k \subset \mathbb{R}^n$  une famille quelconque de fermés de  $\mathbb{R}^n$ . Considérons l'ensemble  $F = \bigcap_k F_k$ , alors  $F^c = \bigcup_k F_k^c$ . Comme chaque  $F_k^c$  est ouvert, la réunion quelconque  $F^c$  de ces ensembles est ouverte dans  $\mathbb{R}^n$  d'après 3. On en déduit que  $F$  est fermé dans  $\mathbb{R}^n$ .
6. Soit  $\{F_1, \dots, F_p\} \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble fini de fermés et soit  $F = \bigcup_{k=1}^p F_k$ . Alors  $F^c = \bigcap_{k=1}^p F_k^c$  est une intersection finie d'ouverts  $F_k^c$ . Il s'agit donc d'un ouvert. On en déduit que  $F$  est un fermé de  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Exemple 2.6 (Contre-exemples).** On donne ici deux contre-exemples pour lesquels "fini" ne peut pas être remplacé par "infini" dans la proposition précédente :

1. Intersection infinie d'ouverts qui est fermée : dans  $\mathbb{R}$ , soit  $\Omega_k := ]-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}[$ . Alors  $\Omega_k$  est ouvert pour tout  $k \geq 1$ , car c'est la boule ouverte centrée en 0 et de rayon  $1/k$ , et on a  $\Omega = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \{0\}$ . En effet,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \in \Omega_k$  donc  $\{0\} \subset \Omega$ , et si  $x \in \Omega_k$  pour tout  $k \geq 1$ , alors  $\forall k \geq 1$ ,  $-\frac{1}{k} \leq x \leq \frac{1}{k}$  et donc, en passant à la limite,  $0 \leq x \leq 0$ , c'est-à-dire  $x = 0$ , ce qui prouve que  $\Omega \subset \{0\}$ . On remarque que  $\{0\}$  est un fermé de  $\mathbb{R}$ .
2. Union infinie de fermés qui n'est ni ouverte, ni fermée : dans  $\mathbb{R}$ , soit  $F_k = \{\frac{1}{k}\}$ , alors  $F_k$  est un fermé pour tout  $k \geq 1$  et  $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ 
  - (a) n'est pas ouvert car  $1 \in S$  et ne contient aucun intervalle ouvert centré en 1 ;
  - (b) n'est pas fermé car la suite  $(\frac{1}{k})_k \subset S$  mais sa limite  $0 \notin S$ .



**Proposition 2.7 (Boules et sphères).** *Quelque soit la norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^n$ , une boule ouverte (resp. fermée) de  $\mathbb{R}^n$  est un ouvert (resp. fermé) de  $\mathbb{R}^n$ . De plus, toute sphère de  $\mathbb{R}^n$  est un fermé de  $\mathbb{R}^n$ .*

*Démonstration.* Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $r > 0$ .

• Toute boule ouverte est un ouvert. Montrons que  $B(x, r)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $y \in B(x, r)$  et  $\delta = r - \|x - y\|$ , alors  $B(y, \delta) \subset B(x, r)$  car si  $z \in B(y, \delta)$ , on a

$$\|z - x\| = \|z - y + y - x\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| < \delta + \|y - x\| = r$$

et ainsi  $z \in B(x, r)$ . Ainsi, il existe une boule ouverte centrée en tout point de  $B(x, r)$  contenue dans cette même boule :  $B(x, r)$  est donc un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

• Toute boule fermée est un fermé. Soit  $(y_k)_k \subset \overline{B}(x, r)$  une suite qui converge vers  $y \in \mathbb{R}^n$ . Montrons que  $y \in \overline{B}(x, r)$ . On a, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\|y - x\| = \|y - y_k + y_k - x\| \leq \|y - y_k\| + \|y_k - x\| \leq \|y - y_k\| + r$$

Ainsi, quand  $k \rightarrow +\infty$ , on a  $\|y - y_k\| \rightarrow 0$  (par convergence de la suite vers  $y$ ) et on obtient que  $\|y - x\| \leq r$  et donc  $y \in \overline{B}(x, r)$ , ce qui prouve que  $\overline{B}(x, r)$  est un fermé de  $\mathbb{R}^n$ .

• Toute sphère est un fermé. On a  $S(x, r) = \overline{B}(x, r) \setminus B(x, r) = \overline{B}(x, r) \cap B(x, r)^c$ . Comme  $\overline{B}(x, r)$  est un fermé et  $B(x, r)$  un ouvert – et donc son complémentaire  $B(x, r)^c$  est un fermé – on en déduit que  $S(x, r)$  est un fermé de  $\mathbb{R}^n$  comme intersection de deux fermés.

□

**Proposition 2.8 (Intervalle de  $\mathbb{R}$ ).** *Soient  $a < b$  deux réels, alors :*

1.  $]a, b[, ]-\infty, a[$  et  $]b, +\infty[$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}$ .
2.  $[a, b], ]-\infty, a]$  et  $[b, +\infty[$  sont des fermés de  $\mathbb{R}$ .



*Démonstration.* (*Exercice donné en CM*) La démonstration de ce résultat utilise à la fois le fait que les boules ouvertes (resp. fermées) sont ouvertes (resp. fermées) et la proposition précédente.

On peut réécrire  $]a, b[ = B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$  qui est une boule ouverte, donc un ouvert de  $\mathbb{R}$ .

Ainsi, en considérant pour tout  $k \geq k_0$ ,  $\Omega_k = ]a + \frac{1}{k}, k[$ , pour  $k_0$  assez grand de sorte que  $a + \frac{1}{k} < k$ , qui est ouvert. On a donc

$$\bigcup_{k=k_0}^{\infty} \Omega_k = ]a, +\infty[$$

qui est un ouvert de  $\mathbb{R}$  comme réunion quelconque d'ouverts. On montre de même que  $]b, +\infty[$  est ouvert en échangeant les bornes.

On peut réécrire  $[a, b] = \overline{B}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$  qui est une boule fermée, donc un fermé de  $\mathbb{R}$ .

Comme  $] -\infty, a[ = \mathbb{R} \setminus ]a, +\infty[$ , cet ensemble est fermé comme complémentaire d'un ouvert.

Comme  $[b, +\infty[ = \mathbb{R} \setminus ] -\infty, b[$ , cet ensemble est fermé comme complémentaire d'un ouvert.  $\square$

**Proposition 2.9 (Ensembles ouverts et fermés).** *Les seuls ensembles à la fois ouverts et fermés dans  $\mathbb{R}^n$  sont  $\emptyset$  et  $\mathbb{R}^n$ .*

*Démonstration.* On sait que  $\emptyset$  et  $\mathbb{R}^n$  sont des parties à la fois ouvertes et fermées de  $\mathbb{R}^n$ .

Réciproquement, soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}^n$  à la fois ouverte et fermée. Supposons que  $A \neq \emptyset, \mathbb{R}^n$ .

On peut donc trouver  $a \in A$  et  $b \in \mathbb{R}^n \setminus A$ . On pose

$$I = \{t \in [0, 1] : (1-t)a + tb \in A\}.$$

On remarque que :

- $I \neq \emptyset$  car  $t = 0 \in I$  puisque dans ce cas-là,  $(1-0)a + 0 \times b = a \in A$ ;
- $I$  est majorée par 1 ;
- $I$  est un ensemble fermé. En effet, si  $(t_n)_n \subset I$  converge vers  $t$ , alors la suite de points  $((1-t_n)a + t_nb)_n \subset A$  converge vers  $(1-t)a + tb \in A$  car  $A$  est fermé. Par définition de  $I$ , on a donc  $t \in I$ .

Ainsi, par les deux premiers points,  $I$  admet une borne supérieure  $s$ . Soit  $(t_n)_n \subset I$  qui converge vers  $s$ . Alors, par passage à la limite,  $x_0 := (1-s)a + sb \in A$  car  $I$  est fermé.

Si  $s = 1$ , alors il y a une contradiction avec le fait que  $(1-1)a + 1 \times b = b \notin A$ .

Si  $s < 1$ , comme  $A$  est ouvert, il existe  $r > 0$  tel que  $B(x_0, r) \subset A$  ce qui implique qu'il existe  $t \in ]s, 1[$  tel que  $ta + (1-t)b \in B(x_0, r) \subset A$ , ce qui contredit la définition de la borne supérieure  $s$ . On a donc une contradiction dans tous les cas, ce qui veut dire que  $A \in \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$ .  $\square$

**Remarque 2.10.** Ainsi, quand on a montré qu'un ensemble (différent de  $\emptyset$  et  $\mathbb{R}^n$ ) est ouvert, il est inutile de montrer qu'il n'est pas fermé!

**Proposition 2.11 (Produits d'ouverts ou de fermés).** *Soient  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^p$  munis de leurs normes euclidiennes  $\|\cdot\|_2$ , alors :*

1. si  $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$  et  $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^p$  sont deux ouverts, alors  $\Omega_1 \times \Omega_2$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ .
2. si  $F_1 \subset \mathbb{R}^n$  et  $F_2 \subset \mathbb{R}^p$  sont deux fermés, alors  $F_1 \times F_2$  est un fermé de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ .

*Démonstration.* On définit la norme  $\|\cdot\|_\infty$  sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  de la façon suivante :

$$\forall x = (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \quad \|x\|_\infty = \max(\|u\|_2, \|v\|_2).$$

 Il s'agit bien d'une norme ([Exercice](#)). De plus, pour tout  $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ , et pour tout  $r > 0$ , on a

$$B_{\|\cdot\|_\infty}(x, r) = B_{\|\cdot\|_2}(u, r) \times B_{\|\cdot\|_2}(v, r).$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} y = (u', v') \in B_{\|\cdot\|_\infty}(x, r) &\iff \max(\|u - u'\|_2, \|v - v'\|_2) < r \iff \|u - u'\|_2 < r \text{ et } \|v - v'\|_2 < r \\ &\iff u' \in B_{\|\cdot\|_2}(u, r) \text{ et } v' \in B_{\|\cdot\|_2}(v, r) \\ &\iff y \in B_{\|\cdot\|_2}(u, r) \times B_{\|\cdot\|_2}(v, r). \end{aligned}$$

1. Soit  $x = (u, v) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ . Comme  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont ouverts, alors  $\exists r_1, r_2 > 0$  tels que  $B(u, r_1) \subset \Omega_1$  et  $B(v, r_2) \subset \Omega_2$ . Soit  $r := \min(r_1, r_2)$ , alors

$$B_{\|\cdot\|_\infty}(x, r) = B_{\|\cdot\|_2}(u, r) \times B_{\|\cdot\|_2}(v, r) \subset B_{\|\cdot\|_2}(u, r_1) \times B_{\|\cdot\|_2}(v, r_2) \subset \Omega_1 \times \Omega_2.$$

Comme  $\|\cdot\|_\infty$  est équivalente à  $\|\cdot\|_2$  sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  par l'équivalence des normes en dimension finie, il est donc clair que  $\Omega_1 \times \Omega_2$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ .

2. Soit  $\{x_k = (u_k, v_k)\}_k \subset F_1 \times F_2$  une suite qui converge vers  $x = (u, v)$ . Comme  $F_1$  et  $F_2$  sont fermés et  $u_k \rightarrow u$ ,  $v_k \rightarrow v$  alors  $u \in F_1$  et  $v \in F_2$ . Ainsi,  $x \in F_1 \times F_2$  et donc cet ensemble est fermé.

□

**Remarque 2.12 (Produit de boules).** Attention : le produit de deux boules euclidiennes n'est pas une boule euclidienne. Par exemple, dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $B_{\|\cdot\|_2}((0,0), 1) \times ]-1, 1[$  où  $]-1, 1[$  est la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 dans  $\mathbb{R}$  n'est PAS la boule unité de  $\mathbb{R}^3$ ,  $B_{\|\cdot\|_2}((0,0,0), 1)$ , mais plutôt un cylindre de rayon 1 et de hauteur 1. On a plutôt, pour  $x = (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  et  $r > 0$ ,  $B_{\|\cdot\|_\infty}(x, r) = B_{\|\cdot\|_2}(u, r) \times B_{\|\cdot\|_2}(v, r)$  comme dans la preuve ci-dessus. De même, on retrouve la boule ouverte de  $\mathbb{R}^2$  pour la norme infinie comme produit de boules ouvertes de  $\mathbb{R}$  pour la valeur absolue, i.e.

$$B_{|\cdot|}(0, 1) \times B_{|\cdot|}(0, 1) = B_{\|\cdot\|_\infty}((0,0), 1) = ]-1, 1[^2.$$