Définition 5.9 (Fonction de classe C^2). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^2 sur Ω, noté $f \in C^2(\Omega)$, si f admet des dérivées partielles premières et secondes continues sur Ω, c'est-à-dire si $f \in C^1(\Omega)$ et admet des dérivées partielles secondes continues sur Ω.*

Proposition 5.10 (Opérations et fonctions deux fois différentiables ou de classe C^2). *Les sommes, produits, quotients (avec dénominateur non-nul) et composées de fonctions deux fois différentiables (resp. de classe C^2) sont deux fois différentiables (resp. de classe C^2).*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des résultats sur les opérations de fonctions continues et celles qui sont différentiables. □

Proposition 5.11 (C^2 implique deux fois différentiable). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $x \in \Omega$ et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$. Si f est de classe C^2, alors f est deux fois différentiable en x.*

Démonstration. Admise. La preuve est similaire à celle du cas C^1. □

Théorème 5.12 (Théorème de Schwarz). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$. Si f est deux fois différentiable, alors pour tout $x \in \Omega$, $D^2_x f$ est une forme bilinéaire symétrique. En particulier, pour tout $1 \leq i, j \leq n$,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0).$$

Démonstration. (Admise, non-données en CM) Soit $x \in \Omega$. On sait déjà que $D^2_x f$ est une forme bilinéaire. Montrons qu'elle est symétrique, c'est-à-dire que pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $D^2_x f(h,k) = D^2_x f(k,h)$.
Comme f est deux fois différentiable, alors pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $x \mapsto D_x f(h)$ est différentiable sur Ω. On a donc, quand $h \to 0$, dans l'espace $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$,

$$\varphi_{x,h} := D_{x+h} f - D_x f - D_x[Df(h)] = o(\|h\|_2),$$

ce qui veut dire que pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall k \in \mathbb{R}^n$,

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \|h\|_2 < \delta \Rightarrow |\varphi_{x,h}(k)| \leq \varepsilon \|h\|_2.$$

En particulier, en utilisant le fait que $\varphi_{x,h}$ est une application linéaire, et en appliquant cette inégalité à $\frac{k}{\|k\|}$ quand $k \neq 0$, comme $\varphi_{x,h}\left(\frac{k}{\|k\|_2}\right) = \frac{\varphi_{x,h}(k)}{\|k\|_2}$, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall k \neq 0, \forall h \in \mathbb{R}^n, \|h\|_2 < \delta \Rightarrow |\varphi_{x,h}(k)| \leq \varepsilon \|k\|_2 \|h\|_2.$$

Cette inégalité restant vrai pour $k = 0$, on a donc obtenu que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $h \in B(0,\delta)$ et tout $k \in \mathbb{R}^n$,

$$\left|D_{x+h} f(k) - D_x f(k) - D_x[Df(h)](k)\right| \leq \varepsilon \|h\|_2 \|k\|_2, \quad D_x[Df(h)](k) = D^2_x f(h,k).$$

Fixons $h \in B(0,\delta)$ et $k \in \mathbb{R}^n$, et définissons $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ pour tout $t \in [0,1]$ par

$$\psi(t) = f(x+h+tk) - f(x+tk) - tD^2_x f(h,k).$$

La fonction ψ est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$, et pour tout $t \in]0,1[$, en notant $u(t) = x + h + tk$, on a

$$D_t(f \circ u) = D_{u(t)} f \circ D_t(u) = D_{x+h+tk} f(k),$$

et on obtient

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= D_{x+h+tk} f(k) - D_{x+tk} f(k) - D_x^2 f(h,k) \\
&= \left[D_{x+h+tk} f(k) - D_x f(k) - D_x^2 f(h+tk,k)\right] - \left[D_{x+tk} f(k) - D_x f(k) - D_x^2 f(tk,k)\right],
\end{aligned}$$

par bilinéarité de $D_x^2 f$. On obtient donc, pour tout $t \in]0,1[$,

$$\begin{aligned}
|\psi'(t)| &\le \left|D_{x+h+tk} f(k) - D_x f(k) - D_x^2 f(h+tk,k)\right| + \left|D_{x+tk} f(k) - D_x f(k) - D_x^2 f(tk,k)\right| \\
&\le \varepsilon \|h + tk\|_2 \|k\|_2 + \varepsilon \|tk\|_2 \|k\|_2 \le \varepsilon \|k\|_2 (\|h\|_2 + t\|k\|_2 + t\|k\|_2) \\
&\le \varepsilon (\|h\|_2 + 2\|k\|_2)\|k\|_2.
\end{aligned}$$

On remarque que

$$\psi(1) - \psi(0) = f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x) - D_x^2 f(h,k)$$

et on applique le théorème des accroissements finis à ψ sur $[0,1]$, ce qui nous donne, pour un certain $t_0 \in]0,1[$,

$$\left|\psi(1) - \psi(0)\right| = |\psi'(t_0)(1-0)| = |\psi'(t_0)| \le \varepsilon \left(\|h\|_2 \|k\|_2 + 2\|k\|_2^2\right)$$

c'est-à-dire

$$\left|f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x) - D_x^2 f(h,k)\right| \le \varepsilon \left(\|h\|_2 \|k\|_2 + 2\|k\|_2^2\right)$$

En échangeant les rôles de k et h, on obtient aussi que

$$\left|f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x) - D_x^2 f(k,h)\right| \le \varepsilon \left(\|h\|_2 \|k\|_2 + 2\|h\|_2^2\right).$$

On obtient donc

$$\left|D_x^2 f(h,k) - D_x^2 f(k,h)\right| \le 2\varepsilon \left(\|h\|_2 \|k\|_2 + \|h\|_2^2 + \|k\|_2^2\right).$$

Cette inégalité est en faite valable pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par bilinéarité de $D_x^2 f$. Ainsi, quand $\varepsilon \to 0$, on obtient que $D_x^2 f(h,k) = D_x^2 f(k,h)$ pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, et donc que $D_x^2 f$ est symétrique. □

Remarque 5.13 (Réciproque fausse). Le réciproque du théorème est fausse. Ce n'est pas parce que le théorème de Schwarz est vérifié en x_0 que f est deux fois différentiable en x_0. Il n'est évidemment pas nécessaire que la fonction soit deux fois différentiable en x_0 pour que ses dérivées partielles secondes existent en ce point.

Exemple 5.14. Donnons ici deux exemples d'applications de ce théorème :

1. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x,y) = x^4 + 2x^2 - 3y^3$, alors il est clair que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 4x^3,$$

car $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ et donc deux fois différentiable.

2. **Exemple de Peano.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calculons les dérivées partielles de f en $(0,0)$:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

et

$$\lim_{\substack{k\to 0\\ k\neq 0}} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

De plus, on a, pour tout $x \neq 0$ et $y \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = -y, \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,k)-f(x,0)}{k} = x.$$

On obtient donc

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = 1.$$

On en déduit que f n'est pas deux fois différentiable en $(0,0)$.

Théorème 5.15 (Formule de Taylor-Young à l'ordre 2). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \Omega$. Si f est deux fois différentiable sur Ω, alors pour tout h tel que $x_0 + h \in \Omega$, on a (les trois formules sont identiques, simplement écrites de manières différentes) :*

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + D_{x_0}f(h) + \frac{1}{2}D^2_{x_0}f(h,h) + o(\|h\|_2^2) \\ &= f(x_0) + \langle \nabla_{x_0} f, h\rangle + \frac{1}{2}\langle H_f(x_0)h, h\rangle + o(\|h\|_2^2) \\ &= f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j + o(\|h\|_2^2), \end{aligned}$$

que l'on écrit de manière équivalente, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ et $x \to x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n})$,

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_{0,i}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)(x_i - x_{0,i})(x_j - x_{0,j}) + o\left(\|x - x_0\|_2^2\right),$$

où $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_{0,i}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)(x_i - x_{0,i})(x_j - x_{0,j})$ est appelé Polynôme de Taylor d'ordre 2 de f au voisinage de x_0.

Remarque 5.16. La deuxième formule s'obtient simplement en posant $h = x - x_0$.

Démonstration. (Admise, non-donnée en CM) Soit $x_0 \in \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable sur Ω. Montrons que $f(x_0+h) - f(x_0) - \langle \nabla_{x_0} f, h\rangle - \frac{1}{2}\langle H_f(x_0)h, h\rangle = o(\|h\|_2^2)$. Pour cela, on définit $g : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \Omega$ pour tout $t \in [0,1]$ par

$$g(t) = f(x_0+th) - f(x_0) - t\langle \nabla_{x_0} f, h\rangle - \frac{t^2}{2}\langle H_f(x_0)h, h\rangle,$$

où $h \in \Omega$ est tel que $[x_0, x_0+h] = \{x_0 + th : t \in [0,1]\} \subset \Omega$ de telle sorte que g soit continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. On remarque que

$$g(1) - g(0) = f(x_0+h) - f(x_0) - \langle \nabla_{x_0} f, h\rangle - \frac{1}{2}\langle H_f(x_0)h, h\rangle.$$

Comme g est dérivable on a, pour tout $t \in]0,1[$,

$$g'(t) = D_{x_0+th} f(h) - \langle \nabla_{x_0} f, h\rangle - t\langle H_f(x_0)h, h\rangle.$$

Comme f est deux fois différentiable sur Ω, Df est différentiable en x_0 et on en déduit (cf. preuve de la proposition précédente) qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $h \in B(0,\delta)$ et tout $k \in \mathbb{R}^n$,

$$D_{x_0+h} f(k) = D_{x_0} f(k) + D^2_{x_0} f(h,k) + \|h\|\|k\|\varepsilon(h)$$

où ε est une fonction de limite nulle en 0. Pour $h \in B(0,\delta)$ et $t \in]0,1[$, en appliquant la formule précédente à $(h,k) = (th,h) \in B(0,\delta) \times B(0,\delta)$ car $t \in]0,1[$, on obtient, bar bilinéarité de $D^2_{x_0} f$, $D_{x_0+th} f(k) = D_{x_0} f(h) + D^2_{x_0} f(th,h) + \|th\|\|h\|\varepsilon(th)$, et donc

$$\begin{aligned} g'(t) &= D_{x_0} f(h) + D^2_{x_0} f(th,h) + \|th\|\|h\|\varepsilon(th) - \langle \nabla_{x_0} f, h\rangle - t\langle H_f(x_0)h, h\rangle \\ &= D_{x_0} f(h) + tD^2_{x_0} f(h,h) + \|th\|\|h\|\varepsilon(th) - D_{x_0} f(h) - tD^2_{x_0} f(h,h) = t\|h\|^2\varepsilon(th), \end{aligned}$$

où la deuxième égalité est obtenue par bilinéarité de $D^2_{x_0} f$. On en déduit que

$$\forall t \in]0,1[, \quad |g'(t)| \le |\varepsilon(th)|t\|h\|^2 \le \tilde{\varepsilon}(h)\|h\|^2$$

en notant $\tilde{\varepsilon}(h) = \sup_{t\in]0,1[} |\varepsilon(th)| \ge 0$ qui a une limite nulle quand $h \to 0$. On applique l'inégalité des accroissements finis à g qui est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$, et on a donc :

$$\left| f(x_0+h) - f(x_0) - \langle \nabla_{x_0} f, h\rangle - \frac{1}{2}\langle H_f(x_0)h, h\rangle \right| = |g(1) - g(0)| \le \left(\sup_{t\in]0,1[} |g'(t)| \right)(1-0) \le \tilde{\varepsilon}(h)\|h\|^2,$$

et on obtient le résultat voulu. □

Exemple 5.17. Si $n = 2$, et sous les hypothèses du théorème précédent, on a, quand $(h,k) \to (0,0)$,

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)k^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)hk + o(h^2+k^2), \end{aligned}$$

qui s'écrit aussi, quand $(x,y) \in \Omega$, $(x,y) \mapsto (x_0,y_0)$,

$$\begin{aligned} f(x,y) = & f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) \\ & + o((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2), \end{aligned}$$

5.3 Généralisation... en bref et sans preuve !

On peut généraliser les sections précédentes pour $k \geq 3$:

- Une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est k fois différentiable si les dérivées partielles d'ordre $k-1$ sont différentiables.
- Dans ce cas, f admet des dérivées partielles d'ordre k en tout point x_0 de l'ouvert Ω et on note $D^k_{x_0} f$ la différentielle k-ième au point x.
- L'application $D^k_{x_0} f$ est k-linéaire et on a, pour tout $(h^1, ..., h^k) \in (\mathbb{R}^n)^k$,

$$D^k_{x_0} f(h^1, ..., h^k) = \sum_{i_1, ..., i_k = 1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_k}}(x_0) h^1_{i_1} ... h^k_{i_k}.$$

- Le fait que f soit k fois différentiable assure que la forme k-linéaire précédente est symétrique (théorème de Schwarz généralisé) : on peut dériver par rapport aux variables dans n'importe quel ordre, cela ne change pas le résultat. Autrement dit, si $(j_1, ..., j_k)$ est une permutation de $(i_1, ..., i_k)$, alors

$$\forall x_0 \in \Omega, \quad \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_k}}(x_0) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_k}}(x_0).$$

- Une application f est de classe C^k si elle est de classe C^{k-1} et de dérivées partielles k-ièmes continues. Une telle application est automatiquement k fois différentiable.
- La formule de Taylor-Young à l'ordre k pour f qui est k fois différentiable s'écrit

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} D^j_{x_0} f(h, .., h) + o(\|h\|_2^k) \\ &= f(x_0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^j f \right] (x_0) + o(\|h\|_2^k). \end{aligned}$$

  et le polynôme de Taylor d'ordre k de f au voisinage de x_0 est donc $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ défini pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$\begin{aligned} P(x) &= f(x_0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} D^j_{x_0} f(x - x_0, ..., x - x_0) \\ &= f(x_0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{0,i}) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^j f \right] (x_0) \end{aligned}$$

- De même, on peut définir la notion de fonction infiniment différentiable, c'est-à-dire que $D^k f$ est différentiable pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus, on dit que $f \in C^\infty(\Omega)$ si f admet des dérivées partielles de tout ordre qui sont continues.