

4.2 Opérations algébriques sur les différentielles

Proposition 4.14 (Opérations). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de \mathbb{R}^n , $V \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert de \mathbb{R}^p , $\alpha \in \mathbb{R}$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$, $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si f et g sont différentiables sur Ω , et φ différentiable sur V , alors :

1. **(Linéarité)** $\alpha f + g$ est différentiable sur Ω et, pour tout $x \in \Omega$, on a

$$D_x(\alpha f + g) = \alpha D_x f + D_x g.$$

2. **(Produit)** si $p = 1$, fg est différentiable sur Ω et, pour tout $x \in \Omega$, on a

$$D_x(fg) = g(x)D_x f + f(x)D_x g.$$

3. **(Quotient)** si $p = 1$ et $g \neq 0$ sur Ω , alors $\frac{f}{g}$ est différentiable sur Ω et pour tout $x \in \Omega$, on a

$$D_x\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g(x)D_x f - f(x)D_x g}{(g(x))^2}.$$

4. **(Composée)** si de plus $f(\Omega) \subset V$, alors $\varphi \circ f$ est différentiable sur Ω et, pour tout $x \in \Omega$,

$$D_x(\varphi \circ f) = D_{f(x)}\varphi \circ D_x f.$$

Démonstration. (Non donnée en cours / Similaire à celle dans le cas $n = p = 1$ vue en L1 dans le cas de la dérivabilité)

1. Linéarité. Par différentiabilité de f et g , on obtient, pour tout $x \in \Omega$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $x + h \in \Omega$,

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + D_x f(h) + o(\|h\|_2) \\ g(x+h) &= g(x) + D_x g(h) + o(\|h\|_2). \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$(\alpha f + g)(x+h) = (\alpha f + g)(x) + (\alpha D_x f + D_x g)(h) + o(\|h\|_2),$$

où $h \mapsto (\alpha D_x f + D_x g)(h)$ est linéaire, ce qui permet de conclure que $\alpha f + g$ est différentiable, de différentielle $\alpha D_x f + D_x g$.

4. Composée. Soit $x \in \Omega$. Par hypothèse, on a, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $x + h \in \Omega$ et tout $k \in \mathbb{R}^p$ tel que $f(x) + k \in V$,

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + D_x f(h) + o(\|h\|_2) \\ \varphi(f(x) + k) &= \varphi(f(x)) + D_{f(x)}\varphi(k) + o(\|k\|_2). \end{aligned}$$

La première égalité nous donne

$$(\varphi \circ f)(x+h) = \varphi(f(x+h)) = \varphi(f(x) + D_x f(h) + o(\|h\|_2)).$$

Ainsi, on obtient à partir de la deuxième égalité, pour $k = D_x f(h) + o(\|h\|_2)$,

$$(\varphi \circ f)(x+h) = \varphi(f(x)) + D_{f(x)}\varphi(D_x f(h) + o(\|h\|_2)) + o(\|D_x f(h) + o(\|h\|_2)\|_2),$$

et ainsi, par linéarité de $D_{f(x)}g$, on obtient

$$(\varphi \circ f)(x+h) = \varphi(f(x)) + D_{f(x)}\varphi \circ D_x f(h) + r(h),$$

où $\mapsto D_{f(x)}\varphi \circ D_x f(h)$ est linéaire et le reste $r(h)$ est donné par

$$r(h) := D_{f(x)}\varphi(o(\|h\|_2)) + o(\|D_x f(h) + o(\|h\|_2)\|_2).$$

Il reste à montrer que $r(h) = o(\|h\|_2)$. Par continuité des applications $D_{f(x)}\varphi$ et $D_x f$, il existe deux réels positifs L et M tels que, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ et tout $k \in \mathbb{R}^p$,

$$\|D_x f(h)\|_2 \leq L\|h\|_2, \quad \text{et} \quad \|D_{f(x)}\varphi(k)\|_2 \leq M\|k\|.$$

On en déduit que

$$\|D_{f(x)}\varphi(o(\|h\|_2))\|_2 \leq M|o(\|h\|_2)|$$

et

$$\|D_x f(h) + o(\|h\|_2)\|_2 \leq \|D_x f(h)\|_2 + |o(\|h\|_2)| \leq L\|h\|_2 + |o(\|h\|_2)|.$$

Ainsi, $r(h) = o(\|h\|_2)$ et l'application $\varphi \circ f$ est donc différentiable en $x \in \Omega$ et $D_x(\varphi \circ f) = D_{f(x)}\varphi \circ D_x f$.

2. Produit. On considère l'application bilinéaire $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(x, y) = xy.$$

L'application φ est bilinéaire et différentiable, donc pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$D_{(x,y)}\varphi(h, k) = hy + xk.$$

Considérons maintenant l'application $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour tout $x \in \Omega$ par

$$u(x) = (f(x), g(x)).$$

Alors u est différentiable et on a, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$D_x u(h) = (D_x f(h), D_x g(h)).$$

On remarque maintenant que l'application $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$p(x) = f(x)g(x)$$

vérifie $p = \varphi \circ u$ et sa différentielle en $x \in \Omega$ est donc (d'après 4.)

$$D_x p = D_{(f(x), g(x))}\varphi \circ D_x u,$$

et on obtient ainsi $D_x(fg) = g(x)D_x f + f(x)D_x g$.

3. Quotient. On remarque que $q = \varphi \circ \Psi$ où $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $\varphi(u, v) = \frac{u}{v}$ et $\Psi = (f, g)$. L'application φ est différentiable et on a $\varphi(u, v) = u \times i(v)$ où $i : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $i(z) = \frac{1}{z}$. On a donc, par composition, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$,

$$D_{(u,v)}\varphi(h, k) = h \times i(v) + u \times D_v i(k) = \frac{h}{v} - \frac{ku}{v^2} = \frac{hv - ku}{v^2}.$$

On en déduit donc que, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} D_{x_0} q(h) &= D_{x_0}(\varphi \circ \Psi)(h) = (D_{\Psi(x_0)}\varphi \circ D_{x_0}\Psi)(h) = D_{\Psi(x_0)}\varphi(D_{x_0}f(h), D_{x_0}g(h)) \\ &= \frac{f(x_0)D_{x_0}g(h) - g(x_0)D_{x_0}f(h)}{g(x_0)^2}. \end{aligned}$$

□

4.3 Dérivées directionnelles/partielles, gradient et matrice Jacobienne

Définition 4.15 (Dérivées directionnelles/partielles). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $x_0 \in \Omega$, $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$.

• On dit que f admet une dérivée en x_0 suivant le vecteur v si l'application

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad t \mapsto f(x_0 + tv)$$

est différentiable en 0, c'est-à-dire si

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \text{ existe.}$$

La dérivée de f en x_0 selon v se note alors $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$.

De plus, si f admet une dérivée selon le vecteur v en tout point x de Ω , on appelle dérivée de f suivant v l'application

$$\frac{\partial f}{\partial v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad x \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(x).$$

• En particulier, si $\mathcal{B} := \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de \mathbb{R}^n , on dit que f admet une i -ème dérivée partielle (première) en x_0 si f admet une dérivée en x_0 suivant le vecteur e_i . On la notera généralement $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ ou $\partial_i f(x_0)$ (plus rarement $\frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0)$).

De plus, si f admet une i -ème dérivée partielle en tout point $x \in \Omega$, on appelle i -ème dérivée partielle de f l'application

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Enfin, si f admet une telle dérivée partielle pour tout $1 \leq i \leq n$, alors $\{\partial_1 f, \dots, \partial_n f\}$ sont appelées les dérivées partielles de f .

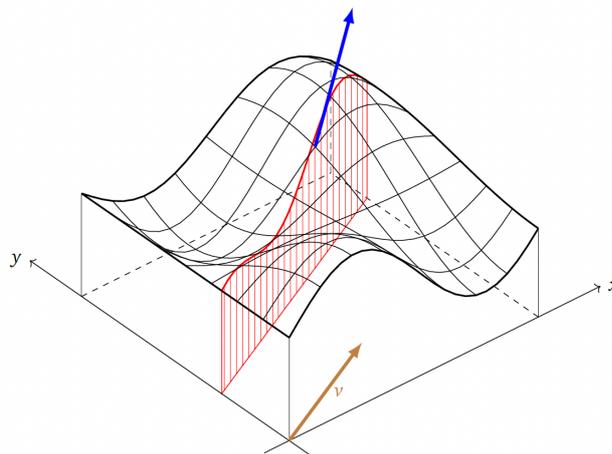


FIGURE 8 : Cas de $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. La dérivée suivant le vecteur v au point (x_0, y_0) donne la pente (par rapport au plan (xOy)) du vecteur dessiné en bleu partant de $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

Exemple 4.16. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^2 - y^3,$$

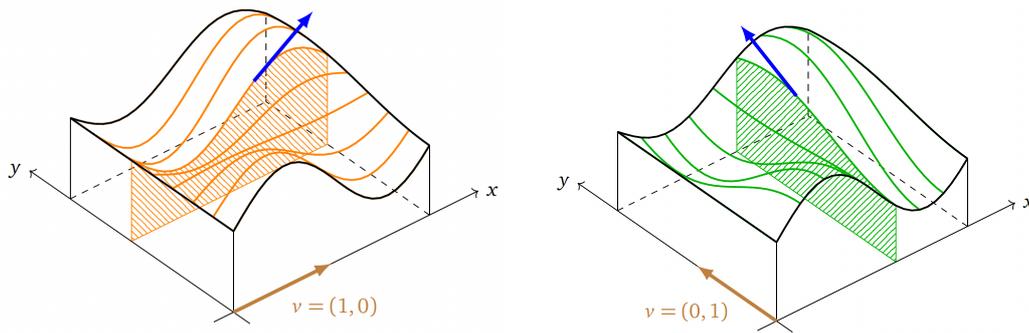


FIGURE 9 : Cas de $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. La dérivée suivant le vecteur $(1, 0)$ (resp. $(0, 1)$) au point (x_0, y_0) donne la pente (par rapport au plan (xOy)) du vecteur dessiné en bleu partant de $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

et considérons le vecteur $v = (1, -2) \in \mathbb{R}^2$ et le point $x_0 = (1, 0)$. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = 2$.



(Exercice donné en CM)



Proposition 4.17 (Différentiabilité implique dérivées directionnelles). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $x_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$. Si f est différentiable en x_0 alors pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, f admet une dérivée en x_0 suivant v et on a

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = D_{x_0}f(v).$$

Démonstration. Soient $t \neq 0$ et $v \neq 0$, alors, comme f est différentiable en x_0 , on a, quand $t \rightarrow 0$,

$$\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \frac{D_{x_0}f(tv) + o(\|tv\|_2)}{t} = D_{x_0}f(v) + o(1) \rightarrow D_{x_0}f(v),$$

par linéarité de $D_{x_0}f$. Donc f admet une dérivée en x_0 suivant v qui est bien $D_{x_0}f(v)$. \square

Exemple 4.18. (Fonction non-différentiable mais avec des dérivées directionnelles) La réciproque de cette proposition est fautive!! Une application peut admettre en x_0 une dérivée directionnelle suivant n'importe quel vecteur v non-nul sans qu'elle soit continue en x_0 (et donc non-différentiable en ce point).

Par exemple, on considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice : Montrer que f admet une dérivée directionnelle selon tout vecteur au point $(0, 0)$ mais que f n'est pas continue, donc pas différentiable, en $(0, 0)$.

Correction : Soit $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $x_0 = (0, 0)$, alors

$$\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \frac{f(ta, tb)}{t} = \begin{cases} \frac{b^2}{a} & \text{si } a \neq 0 \\ 0 & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

On a donc

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \begin{cases} \frac{b^2}{a} & \text{si } a \neq 0 \\ 0 & \text{si } a = 0, \end{cases}$$

ce qui prouve que f admet une dérivée directionnelle en $(0, 0)$ suivant tout vecteur $v \neq 0$. Cependant, on a, quand $x \rightarrow 0$,

$$f(x, \sqrt{x}) = 1 \rightarrow 1 \neq f(0, 0),$$

et donc f n'est pas continue en x_0 , et donc non-différentiable en ce point.

Remarque 4.19 (Dérivées partielles par rapport à la base canonique). En pratique, on choisira le plus souvent la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^n . Soit $i \in \{1, \dots, n\}$, l'application f admet donc une i -ème dérivée partielle au point $x_0 = (x_1, \dots, x_n)$

$$\iff u \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, u, x_{i+1}, \dots, x_n) \text{ est dérivable en } x_i,$$

$$\iff t \mapsto f(x_0 + te_i) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n) \text{ est dérivable en } 0,$$

et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_0)}{t}.$$

On calcule donc la dérivée par rapport à la variable x_i en considérant les autres variables constantes.

Exemple 4.20. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^2 y - 2 \sin(xy).$$

Comme, pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $x \mapsto f(x, y_0)$ et $y \mapsto f(x_0, y)$ sont dérivable sur \mathbb{R} , on a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy - 2y \cos(xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 - 2x \cos(xy).$$

Proposition 4.21 (Différentielle et dérivées partielles). Soit $\mathcal{B} := \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de \mathbb{R}^n , $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $x_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$. Si f est différentiable en x_0 , alors

1. les n dérivées partielles de f en x_0 existent;

2. pour tout $h = h_1 e_1 + \dots + h_n e_n \in \mathbb{R}^n$, on a

$$D_{x_0} f(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$$

3. pour tout $h = h_1 e_1 + \dots + h_n e_n \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_0 + h \in \Omega$ et $h \rightarrow 0$, on a

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i + o(\|h\|_2)$$

que l'on peut réécrire, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, quand $x \rightarrow x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$,

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_0^i) + o(\|x - x_0\|_2)$$



Démonstration. Si f est différentiable en x_0 , alors f admet des dérivées directionnelles en x_0 dans toutes les directions, en particuliers dans celles données par la base \mathcal{B} . Les n dérivées partielles existent donc bien. De plus, on a

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = D_{x_0}f(e_i).$$

Pour $h = h_1 e_1 + \dots + h_n e_n \in \mathbb{R}^n$, on obtient donc, par linéarité de la différentielle,

$$D_{x_0}f(h) = D_{x_0}f\left(\sum_{i=1}^n h_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n h_i D_{x_0}f(e_i) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$$

Le troisième point est une conséquence immédiate de la définition de la différentielle. □

Exemple 4.22. On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = (xe^{xy}, x^2 + y^2)$$

et $x_0 = (2, 1)$. Montrer que $D_{x_0}f$ est définie par

$$\forall (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2, \quad D_{x_0}f(h_1, h_2) = (3e^2 h_1 + 4e^2 h_2, 4h_1 + 2h_2).$$



(Exercice donné en CM)

Remarque 4.23. En pratique, pour étudier la différentiabilité de f en x_0 :

1. On étudie l'existence des dérivées partielles de f en x_0 en cherchant à calculer, pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x_0 + t e_i) - f(x_0)}{t},$$

ce qui donnera $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ si la limite existe. Si une de ces limites n'existe pas, alors f n'est pas différentiable en x_0 .

2. Si toutes les dérivées partielles existent, on considère l'application linéaire $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ définie par

$$\forall h = (h_1, \dots, h_n), \quad L(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0),$$

et on vérifie que

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)\|_2}{\|h\|_2} = 0.$$

Si c'est le cas, alors f est différentiable en x_0 et $D_{x_0}f = L$, sinon elle ne l'est pas.

Définition 4.24 (Gradient, Matrice Jacobienne et jacobien d'une application). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $x_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable en x_0 .

• Si $p = 1$, alors on appelle gradient de f en x_0 le vecteur des dérivées partielles de f en x_0 , c'est-à-dire

$$\nabla_{x_0} f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

Notons que l'on a, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$D_{x_0} f(h) = \langle \nabla_{x_0} f, h \rangle = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0). \quad (4.2)$$

• Si $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on appelle matrice jacobienne de f au point x_0 la matrice de l'application linéaire $D_{x_0} f$. Elle est noté $J_f(x_0)$ et on a

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}).$$

On a ainsi, pour tout $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$J_f(x_0) \begin{pmatrix} h_1 \\ \cdots \\ h_n \end{pmatrix} = D_{x_0} f(h).$$

De plus, si $p = n$, on appelle jacobien de f au point x_0 , noté $\text{Jac} f(x_0)$ le déterminant de la matrice carrée $J_f(x_0)$, c'est-à-dire

$$\text{Jac} f(x_0) = \det(J_f(x_0))$$

Remarque 4.25. En fait, $\nabla_{x_0} f$ est l'unique vecteur vérifiant (4.2). En effet, comme $D_{x_0} f$ est une forme linéaire sur \mathbb{R}^n , il s'agit simplement d'une application du Théorème de représentation de Riesz.

Exemple 4.26. Le gradient de l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, donnée par $f(x, y, z) = x^3 - 2xz - z^3$, en (x, y, z) est

$$\nabla_{(x,y,z)} f = (3x^2 - 2y, -2x, -3z^2)$$