Exemple 4.27. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, alors (par composition) on a, pour tout $x \neq 0$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$D_x f(h) = \frac{\langle x, h\rangle}{\|x\|} = \langle \frac{x}{\|x\|}, h\rangle,$$

et on en déduit automatiquement que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \nabla_x f = \frac{x}{\|x\|_2}.$$

Le résultat suivant se déduit automatiquement des propriétés sur les différentielles.

Proposition 4.28 (Matrice jacobienne et opérations). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $x_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$, $g : \Omega \to \mathbb{R}^p$ deux applications différentiables en x_0, alors on a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$J_{\alpha f+g}(x_0) = \alpha J_f(x_0) + J_g(x_0).$$

Soit $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ et $V \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert tel que $f(\Omega) \subset V$. On suppose que f est différentiable en $x_0 \in \Omega$ et h est différentiable en $f(x_0)$, alors

$$J_{h\circ f}(x_0) = J_h(f(x_0)) \times J_f(x_0)$$

De plus, dans ce cas, on a

$$\mathrm{Jac}(h \circ f)(x_0) = \mathrm{Jac}\, h(f(x_0)) \times \mathrm{Jac}\, f(x_0)$$

Exemple 4.29. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x, y) = (xy^2, e^{xy}) \quad \text{et} \quad g(u, v) = u^3 - v^3.$$

Déterminons $J_{g\circ f}(1,1)$. On calcule facilement

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_g(u, v) = \begin{pmatrix} 3u^2 & -3v^2 \end{pmatrix},$$

et ainsi, au point $x_0 = (1,1)$, on a

$$J_f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ e & e \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_g(f(1,1)) = J_g(1, e) = \begin{pmatrix} 3 & -3e^2 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc

$$J_{g\circ f}(1,1) = J_g(f(1,1)) \times J_f(1,1) = \begin{pmatrix} 3 & -3e^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ e & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-3e^2 & 6-3e^3 \end{pmatrix}.$$

✎ ***Exercice :*** *retrouver ce résultat en calculant directement $g \circ f$ puis en déterminant sa matrice jacobienne.*

La formule donnant la matrice jacobienne d'une fonction composée permet de montrer le résultat suivant (c'est une simple multiplication de matrices) :

Proposition 4.30 (Dérivées partielles d'une fonction composée à valeurs réelles). *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^p$ deux ouverts. On considère l'application $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ définie par*

$$f(x_1, ..., x_n) = \big(f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_p(x_1, \cdots, x_n)\big) \in \mathbb{R}^p$$

telle que $f(\Omega) \subset V$, différentiable en $x_0 \in \Omega$ et $g : V \to \mathbb{R}$,

$$(y_1, \cdots, y_p) \mapsto g(y_1, \cdots, y_p) \in \mathbb{R}.$$

différentiable en $y_0 = f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en x_0 et pour tout $1 \le i \le n$,

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_k}(y_0) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x_0)$$

Exemple 4.31. Dérivées partielles et différentielle d'une composée
On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable, et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x^2 y^3, e^{x^2+y^2})$. Alors on a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= 2xy^3 \frac{\partial f}{\partial x}(x^2 y^3, e^{x^2+y^2}) + 2xe^{x^2+y^2} \frac{\partial f}{\partial y}(x^2 y^3, e^{x^2+y^2}) \\
\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= 3x^2 y^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x^2 y^3, e^{x^2+y^2}) + 2ye^{x^2+y^2} \frac{\partial f}{\partial y}(x^2 y^3, e^{x^2+y^2}).
\end{aligned}$$

Ainsi, la différentielle de g au point $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ est

$$D_{(x,y)} g : (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(2\frac{\partial f}{\partial x}(1, e^2) + 2e^2 \frac{\partial f}{\partial y}(1, e^2)\right) h_1 + \left(3\frac{\partial f}{\partial x}(1, e^2) + 2e^2 \frac{\partial f}{\partial y}(1, e^2)\right) h_2.$$

Exemple 4.32. (Coordonnées polaires).
On considère l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[\subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $(r, \theta) \in \Omega$ par

$$f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

De plus, soit $V \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $g : V \to \mathbb{R}$ ($(x, y) \mapsto g(x, y)$) différentiable et $f(\Omega) \subset V$. On considère $h : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $h = g \circ f$, de telle sorte que $h(r, \theta) = g(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Alors on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r}(r, \theta) \\
&= \frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta) = \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial \theta}(r, \theta) + \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial \theta}(r, \theta),
\end{aligned}$$

et on trouve ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) &= \cos\theta \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
\frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta) &= -r\sin\theta \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)
\end{aligned}$$

Notons aussi que la matrice jacobienne de f en (r, θ) est

$$J_f(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

et donc son jacobien vaut

$$\mathrm{Jac} f(r, \theta) = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

4.4 Interprétation géométrique : le plan tangent (partie distribuée en CM)

On sait déjà que si $f : I \to \mathbb{R}$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, est dérivable en $x_0 \in I$, alors la courbe de f admet une tangente au point $(x_0, f(x_0))$ dont l'équation est

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

En fait, $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ correspond aux termes d'ordres 0 et 1 dans le développement limité de f au voisinage de x_0. Dans cette partie, on donne le même résultat pour une fonction de deux variables réelles.

On considère ici un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable sur Ω et $(x_0, y_0) \in \Omega$. Dans ce cas, le graphe de f

$$\mathscr{G}_f := \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^3$$

est une nappe/surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x, y)$. Elle peut être aussi écrite, en posant

$$F : \Omega \times f(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto F(x, y, z) = f(x, y) - z,$$

$$\mathscr{G}_f := \{(x, y, z) \in \Omega \times f(\Omega) : F(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Par différentiabilité de f en (x_0, y_0), on a donc, au premier ordre, quand $(x, y) \in \Omega$ et $(x, y) \to (x_0, y_0)$,

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|_2).$$

Ainsi, f est localement approximée au premier ordre, au voisinage de (x_0, y_0), par le Polynôme de Taylor d'ordre 1 $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ défini par

$$P : (x, y) \mapsto f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Définition 4.33 (Approximation linéaire et plan tangent). *Avec les notations précédentes, le graphe de P est appelé **plan tangent à $\mathscr{G}_f$ au point $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$, où $z_0 = f(x_0, y_0)$**. Ce plan a pour équation*

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Remarque 4.34. Cette équation de plan s'écrit aussi à l'aide de la fonction F (à vérifier)

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(X_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(X_0)(z - z_0) = 0.$$

De plus, comme ce plan tangent a pour équation

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), c = -1,$$

le vecteur $n = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right) = \nabla_{X_0} F$ est normal/orthogonal à ce plan.

Remarque 4.35. Ainsi, pour tout vecteur $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a, puisque $f(x_0, y_0) = P(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = D_{(x_0,y_0)} f(v) = D_{(x_0,y_0)} f(\alpha, \beta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\beta = P(x_0+\alpha, y_0+\beta) - P(x_0, y_0),$$

qui donne la différence de cote/hauteur entre les images des points (x_0, y_0) et $(x_0, y_0) + v$ sur le plan tangent.

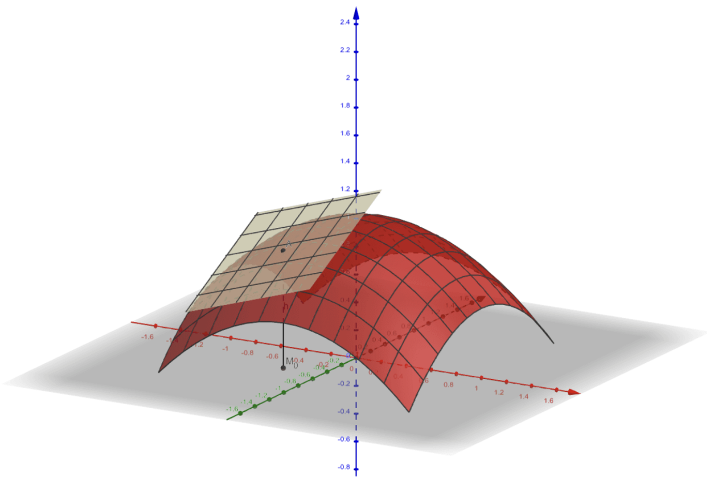

FIGURE 10 : Plan tangent à une surface

4.5 Arcs paramétrés (partie distribuée en CM)

Définition 4.36 (**Arc paramétré**). *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle éventuellement infini. On appelle arc (ou courbe) paramétré de $\mathbb{R}^n$ la donnée d'une application différentiable $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, que l'on peut noter $\varphi = (x_1, ..., x_n)$ où $x_k : I \to \mathbb{R}$ pour tout $1 \leq k \leq n$.*

- *L'image de φ, notée $\mathscr{C} = \varphi(I)$, s'appelle la courbe géométrique associée (appelé aussi le support de φ). On dit que φ définit une paramétrisation de $\mathscr{C}$.*
- *La courbe $\mathscr{C}$ est dite régulière si $\forall t \in I, \varphi'(t) = \left(x_1'(t), ..., x_n'(t)\right) \neq (0, ..., 0)$. On dit aussi que φ est une paramétrisation régulière de $\mathscr{C}$ et que tout point $\varphi(t_0) \in \mathscr{C}$ tel que $t_0 \in I$ et $\varphi'(t_0) \neq (0, ..., 0)$ est régulier.*
- *Soit $t_0 \in I$ tel que $\varphi'(t_0) = (0, ..., 0)$. On dit que le point $\varphi(t_0)$ est un point singulier de la courbe $\mathscr{C}$.*

Exemple 4.37. Les exemples suivants sont les plus simples/importants :

- Graphe d'une fonction. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, alors sa courbe représentative est l'arc paramétré $\varphi(I) \subset \mathbb{R}^2$ où $\varphi : t \mapsto (t, f(t))$.
- Droite de $\mathbb{R}^n$: $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (x_1(t), ..., x_n(t))$ où, pour tout $1 \leq i \leq n$, $x_i(t) = a_i t + b_i$.
- Cercle de centre O et de rayon R : $\varphi : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (R\cos(t), R\sin(t))$.
- Ellipse de demi-axes $a > 0$ et $b > 0$: $\varphi : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (a\cos(t), b\sin(t))$.
- Cycloïde : $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto R(t - \sin t, 1 - \cos t)$.
- Hélice circulaire : $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a > 0$, $b > 0$.

Remarque 4.38. Une courbe $\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^n$ peut admettre une infinité de paramétrisations. Par exemple, le cercle $S((0,0),1) \subset \mathbb{R}^2$ peut être paramétré par

- $\varphi : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$,
- $\varphi : [0, \pi[\to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t))$,
- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $u \mapsto \left(\dfrac{1-u^2}{1+u^2}, \dfrac{2u}{1+u^2}\right)$ en posant $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

Exemple 4.39 (**Courbe régulière et point singulier**). Voici deux exemples :

1. L'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(t) = (t, t^2)$ a pour courbe géométrique associée $\mathscr{C}$ la parabole d'équation $y = x^2$. Cette paramétrisation est régulière car $\varphi'(t) = (1, 2t) \neq (0,0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. L'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ a pour courbe géométrique associée la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y^2 = x^3$, appelée cubique. Comme $\varphi'(t) = (2t, 3t^2)$, le point $(0,0)$ est l'unique point singulier de $\mathscr{C}$.

Proposition 4.40 (**Dérivation de long d'un arc**). *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \to \mathbb{R}^m$ un arc paramétré (donc dérivable en $t \in I$) tel que $\varphi(I) \subset V$ où $V \subset \mathbb{R}^m$ est un ouvert et $g : V \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $\varphi(t)$. Alors $g \circ \varphi$ est différentiable en t et*

$$(g \circ \varphi)'(t) = D_{\varphi(t)} g(\varphi'(t)).$$

L'application $(g \circ \varphi)'$ est appelée la dérivée de g le long de l'arc φ.

Démonstration. C'est une simple application de la formule de composition de fonctions différentiables. □

Définition 4.41 (**Vecteur normal unitaire et repère de Frenet**). *Soit $\mathscr{C} = \varphi(I)$ une courbe de $\mathbb{R}^2$ où $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$, et $\varphi(t_0)$ un point régulier de $\mathscr{C}$. Alors le vecteur unitaire tangent à $\mathscr{C}$ en $\varphi(t_0)$ est donné par*

$$T(t_0) = \frac{\varphi'(t_0)}{\|\varphi'(t_0)\|} = \frac{\big(x'(t_0), y'(t_0)\big)}{\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}}.$$

On appelle vecteur normal unitaire à $\mathscr{C}$ en $\varphi(t_0)$ le vecteur $N(t_0)$ obtenu par rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de $T(t_0)$ dans le sens direct, c'est-à-dire

$$N(t_0) = \frac{\big(-y'(t_0), x'(t_0)\big)}{\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}}.$$

Le repère $(\varphi(t_0); T(t_0), N(t_0))$ est appelé repère de Frenet à $\mathscr{C}$ au point $\varphi(t_0)$.

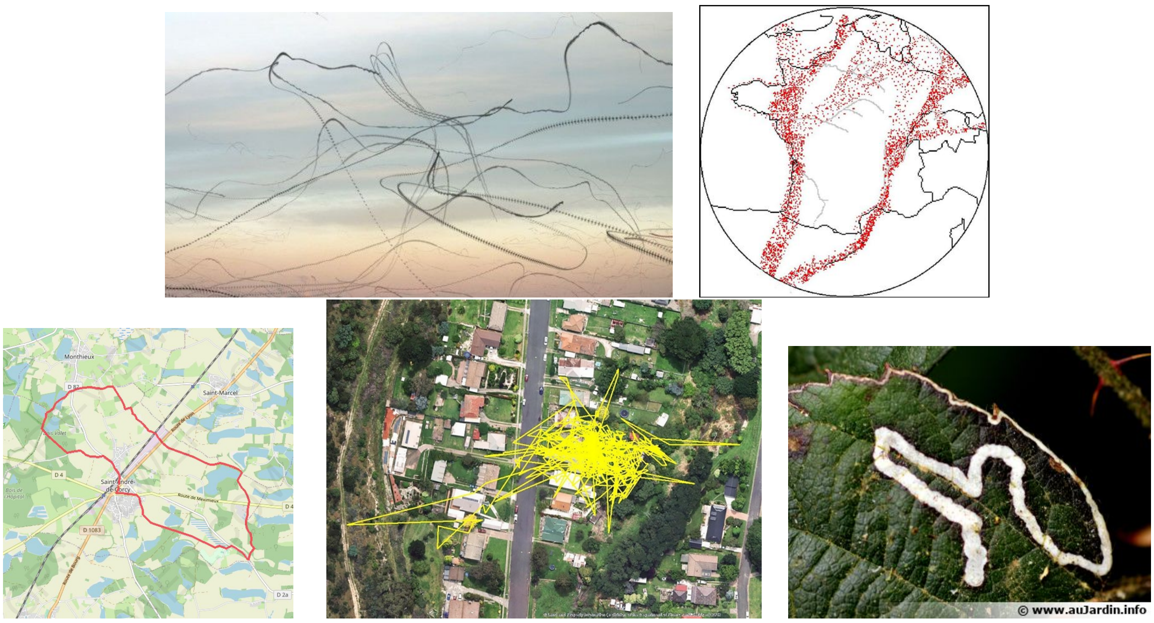

FIGURE 11 : Exemples de courbes : vols d'oiseaux dans le ciel (haut gauche), trajectoire des oiseaux migrateurs (haut droit), chemin de randonnée (bas gauche), suivi GPS d'un chat pendant une journée (bas milieu), chemin d'une chenille de nepticule dorée dans une feuille de ronce.

5 Observer le voisinage : les différentielles d'ordres supérieurs et fonctions de classe C^k

Dans cette partie, on se restreindra aux fonctions à valeurs réelles. On généralisera aisément aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ en décomposant $f = (f_1, ..., f_p)$ où les f_i sont à valeurs réelles.

5.1 Fonctions de classe C^1

Définition 5.1 (Fonction de classe C^1). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^1 sur Ω, noté $f \in C^1(\Omega)$, si f admet des dérivées partielles premières continues sur Ω.*

Exemple 5.2. (Fonction de classe C^1) Soit $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}, \quad f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2).$$

Alors f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. En effet, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2},$$

et ces trois fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

Proposition 5.3 (C^1 implique différentiable). *Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur un ouvert Ω et $x \in \Omega$, alors f est différentiable en x.*

Démonstration. Pour alléger les notations, on suppose que $n = 2$ (le cas général se montre de même). Pour $h = (h_1, h_2)$ tel que $x + h \in \Omega$, on définit

$$r(h) = f(x+h) - f(x) - h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) - h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x).$$

Montrons que, quand $h \to 0$, $r(h) = o(\|h\|_2)$. En effet, on a

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2+h_2) + f(x_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2) \\ &= \int_0^{h_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+t, x_2+h_2)dt + \int_0^{h_2} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2+t)dt \\ &= h_1 \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+sh_1, x_2+h_2)ds + h_2 \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2+sh_2)ds, \end{aligned}$$

où on a posé $t = sh_1$ dans la première intégrale et $t = sh_2$ dans la deuxième. On peut donc écrire

$$r(h) = h_1 \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+sh_1, x_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) \right) ds + h_2 \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2+sh_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) \right) ds.$$

Soit $\varepsilon > 0$, alors par continuité des dérivées partielles de f en x, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $h_1, h_2 \in]-\delta, \delta[$ et $s \in [0,1]$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+sh_1, x_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) \right| < \varepsilon$$

et

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2 + sh_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right| < \varepsilon.$$

On en déduit que $|r(h)| \leq \varepsilon(|h_1| + |h_2|)$ et donc que $r(h) = o(\|h\|_2)$ par équivalence des normes.

□

Proposition 5.4 (Opérations et fonctions de classe C^1). *Les sommes, produits, quotients (avec dénominateur non-nul) et composées de fonctions de classe C^1 sont de classe C^1.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des résultats sur les opérations de fonctions continues et celles qui sont différentiables. □

5.2 Différentielle d'ordre 2, fonctions de classe C^2 et formule de Taylor-Young

Remarquons tout d'abord que si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable, alors $h \mapsto D_x f(h)$ (pour x fixé) est linéaire mais $x \mapsto D_x f(h)$ (pour h fixé) ne l'est pas nécessairement! On peut donc considérer la différentiabilité de l'application $x \mapsto D_x f$ sans que cela soit trivial.

Si f est différentiable, on sait que pour tout $h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$, pour tout $x \in \Omega$,

$$D_x f(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i.$$

Ainsi, supposer la différentiabilité de $x \mapsto D_x f$, c'est supposer celle de $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. Dans le cas, on calcule aisément cette différentielle comme suit : pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, pour tout $k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$D_x\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(k) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x) k_j,$$

ce qui implique, par linéarité, que

$$D_x(Df(h))(k) = \sum_{i=1}^{n} D_x\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(k) h_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x) h_i k_j.$$

On notera :

- $D_x^2 f(h,k) := D_x(Df(h))(k)$, $D_x^2 f$ étant donc une application bilinéaire ;
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) := \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x)$ les n^2 dérivées partielles secondes de f au point x.

Définition 5.5 (**Différentielle seconde**). *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert et* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *une application différentiable. Si, pour tout* $1 \le i \le p$, *l'application* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *est différentiable sur* Ω, *alors on dit que* f *est deux fois différentiable sur* Ω *et on note* $D_x^2 f = D_x(Df)$ *la différentielle seconde de* f *au point* $x \in \Omega$. *De plus, on sait que pour tout* $1 \le i \le p$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *admet des dérivées partielles en tout point* $x \in \Omega$, *appelées dérivées partielles secondes, et données par*

$$\forall 1 \le i \le j, \quad \forall 1 \le j \le n, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x) = \partial_{ji} f(x).$$

La différentielle seconde est donnée par la matrice $n \times n$ *dont le coefficient* (i,j) *est* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$, *c'est-à-dire*

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix},$$

appelée Matrice Hessienne de f *au point* x. *De la même façon que la forme linéaire* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i$ *est associée à la différentielle première de* f *en* x, *la forme bilinéaire associée à la différentielle seconde est donnée par*

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (h,k) \mapsto D_x^2 f(h,k) = \langle H_f(x) h, k \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i k_j.$$

Remarque 5.6. Il est important de bien comprendre les domaines et espaces d'arrivée des différentielles secondes. L'application Df est définie sur un voisinage V de x contenu dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $Df : V \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Ainsi, $D_x^2 f = D_x(Df) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$. Donc $D_x f$ s'applique linéairement à des éléments $h \in \mathbb{R}^n$ et $D_x^2 f(h)$ s'applique linéairement à des éléments $k \in \mathbb{R}^n$ en étant à valeurs réelles. C'est pour cela que l'on peut donc identifier $D_x^2 f$ à une forme bilinéaire en les deux arguments h et k. On pourra donc noter $D_x^2 f(h)(k) = D_x^2 f(h,k)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \quad \longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto D_x^2 f(h) : k \longmapsto D_x^2 f(h)(k) = (D_x(Df)(h))(k) = D_x^2 f(h,k). \end{aligned}$$