

Proposition 4.4 (Unicité et notation). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application. Si f est différentiable en x_0 , l'application linéaire L est unique et est appelée la différentielle de f en x_0 , notée $D_{x_0}f$, et on a ainsi, pour $h \rightarrow 0$ et $x_0 + h \in \Omega$,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + D_{x_0}f(h) + o(\|h\|_2).$$

De manière équivalente, on écrit, pour tout $x \in \Omega$, quand $x \rightarrow x_0$

$$f(x) = f(x_0) + D_{x_0}f(x - x_0) + o(\|x - x_0\|_2).$$

On appelle cette formule le **développement de Taylor-Young à l'ordre 1** de f au voisinage de x_0 . La fonction $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $x \mapsto f(x_0) + D_{x_0}f(x - x_0)$ est appelé **approximation linéaire** (ou **Polynôme de Taylor d'ordre 1**) de f au voisinage de x_0 .

Remarque 4.5. L'application $D_{x_0}f$ est aussi appelée l'application linéaire tangente de f en x_0 . Il est clair que $D_{x_0}f$ dépend du point x_0 !!

Le polynôme de Taylor d'ordre 1 de f en x_0 est donc unique.

Démonstration. Supposons qu'il existe deux applications linéaires L_1 et L_2 satisfaisant (4.1). Cela implique que $L_1(h) - L_2(h) = o(\|h\|_2)$. En particulier, pour $h = tx$ où $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \Omega \setminus \{0\}$, on obtient, par linéarité, quand $t \rightarrow 0$,

$$L_1(tx) - L_2(tx) = t(L_1 - L_2)(x) = o(\|tx\|) = o(|t|).$$

Ainsi, pour tout $x \in \Omega \setminus \{0\}$, $(L_1 - L_2)(x) = o(1)$ quand $t \rightarrow 0$, c'est-à-dire

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|(L_1 - L_2)(x)\| = 0.$$

Or il est clair que $(L_1 - L_2)(x)$ ne dépend pas de t et il en découle que $(L_1 - L_2)(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega \setminus \{0\}$, ce qui veut dire que $L_1(x) = L_2(x)$ pour tout $x \in \Omega \setminus \{0\}$.

Cette égalité sur un ouvert se prolonge en une égalité sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. En effet, comme Ω est un ouvert non-vide, il contient un point $x \in \Omega$ tel que $B(x, r) \subset \Omega$ avec $r > 0$. Soit $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, alors il existe $z \in B(x, r)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $y = \lambda z$ et on a donc, comme $L_1(z) = L_2(z)$,

$$L_1(y) = \lambda L_1(z) = \lambda L_2(z) = L_2(y),$$

donc $L_1 = L_2$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Comme l'égalité est aussi vraie pour $x = 0$, on en déduit que $L_1 = L_2$, d'où l'unicité de la différentielle. $\square$

Remarque 4.6 (Lien avec la dérivabilité). Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ où $\Omega \subset \mathbb{R}$ est un ouvert et $x_0 \in \Omega$, alors f est différentiable en x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0 . La différentielle de f en x_0 est donnée par

$$D_{x_0}f(h) = hf'(x_0),$$

c'est-à-dire que $f'(x_0) = D_{x_0}f(1)$. De plus, on remarque que l'application $h \mapsto D_{x_0}f(h)$ est bien linéaire!

Ainsi, la différentiabilité est une généralisation de la dérivabilité.

Définition 4.7 (Application différentiable). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$. On dit que f est différentiable sur Ω si f est différentiable en tout point de Ω . On appelle alors différentielle de f l'application, notée Df et définie par

$$Df : \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p) \\ x \mapsto D_x f. \end{cases}$$

Exercice : Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que N n'est pas différentiable en 0, mais que N^2 l'est.

Correction. Si tel était le cas pour N , en notant $D_0 N$ cette différentielle, on aurait, quand $h \rightarrow 0$,

$$N(h) = N(0) + D_0 N(h) + o(N(h)) = D_0 N(h) + o(N(h))$$

et, appliqué à $-h$, on a aussi

$$N(-h) = N(0) + D_0 N(-h) + o(N(-h)),$$

c'est-à-dire, par parité de N et linéarité de $D_0 N$,

$$N(h) = N(0) - D_0 N(h) + o(N(h)) = -D_0 N(h) + o(N(h)).$$

On a donc obtenu les deux limites suivantes :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 - \frac{D_0 N(h)}{N(h)} \right) = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{D_0 N(h)}{N(h)} \right) = 0,$$

ce qui donne $2 = 0$ en sommant les deux limites, ce qui est absurde. Donc N n'est pas différentiable à l'origine.

Par contre, N^2 est différentiable en 0 puisque, quand $h \rightarrow 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|N(h)^2 - N(0)^2|}{N(h)} = N(h) \rightarrow 0$$

et ainsi $D_0 N^2 = 0$.

Exemple 4.8. (Différentielle du carré de la norme euclidienne)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$f(x) = \|x\|_2^2.$$

Alors il est facile de montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x+h) = \|x+h\|_2^2 = \|x\|_2^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i h_i + \|h\|_2^2 = \|x\|_2^2 + 2\langle x, h \rangle + \|h\|_2^2,$$

où $\langle x, h \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien entre les vecteurs x et h . Comme $f(x) = \|x\|_2^2$ et $\|h\|_2^2 = o(\|h\|_2)$ quand $h \rightarrow 0$, il en découle que

$$f(x+h) = f(x) + 2\langle x, h \rangle + o(\|h\|_2).$$

L'application $h \mapsto 2\langle x, h \rangle$ est clairement linéaire, ce qui veut dire que la différentielle de f au point x appliquée au vecteur h est donnée par

$$D_x f(h) = 2\langle x, h \rangle.$$



Proposition 4.9 (Différentiable implique continue). Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, Ω ouvert, et $x_0 \in \Omega$. Si f est différentiable en x_0 , alors f est continue en x_0 .

Démonstration. Si f est différentiable en x_0 , alors, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_0 + h \in \Omega$ et $h \rightarrow 0$, on a

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0)\|_2 = \|D_{x_0} f(h) + o(\|h\|_2)\|_2 \leq \|D_{x_0} f(h)\|_2 + o(\|h\|_2) \rightarrow 0$$

par continuité de la norme et de $D_{x_0} f$, puisque $D_{x_0} f(0) = 0$. Ainsi, $\lim_{h \rightarrow 0} \|f(x_0 + h) - f(x_0)\|_2 = 0$ et donc f est continue en x_0 . □

On donne maintenant des résultats concernant les applications linéaires et bilinéaires.

Proposition 4.10 (Différentiabilité et linéarité). On a :

- Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application linéaire. Alors f est différentiable et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$D_x f = f.$$

- Soit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application bilinéaire. Alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et tout $(h, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, on a

$$D_{(x,y)} f(h, k) = f(x, k) + f(h, y).$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p)$ une application linéaire, alors

$$\forall (x, h) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad f(x + h) = f(x) + f(h),$$

avec $h \mapsto f(h)$ linéaire, donc f est effectivement différentiable au point x et

$$D_x f(h) = f(h),$$

c'est-à-dire que la différentielle $D_f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p)$ de f est donnée par

$$D_f : x \mapsto f.$$

On munit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ de la norme infinie définie pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ par $\|u\|_\infty = \max(\|x\|_2, \|y\|_2)$. On a donc, par bilinéarité, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et tout $(h, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$:

$$f(x + h, y + k) = f(x, y) + f(x, k) + f(h, y) + f(h, k).$$

Montrons que $f(h, k) = o(\|(h, k)\|_\infty)$ (comme les normes sont équivalentes, on aura aussi $o(\|(h, k)\|_2)$). Comme f est bilinéaire sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, il existe $M > 0$ tel que (même preuve que dans le cas linéaire)

$$\|f(h, k)\|_\infty \leq M \|h\|_2 \|k\|_2 \leq M \|(h, k)\|_\infty^2.$$

Ainsi, pour $(h, k) \neq (0, 0)$, on a

$$\frac{\|f(h, k)\|_\infty}{\|(h, k)\|_\infty} \leq M \|(h, k)\|_\infty \rightarrow 0$$

quand $(h, k) \rightarrow (0, 0)$, c'est-à-dire $f(h, k) = o(\|(h, k)\|_\infty)$. De plus, l'application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^m$ donnée, pour (x, y) fixés, par

$$(h, k) \mapsto f(x, k) + f(h, y)$$

est linéaire : c'est donc la différentielle de f au point (x, y) , ce qui conclut la preuve. $\square$

Exemple 4.11. (Application linéaire)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = (2x + 5y, -y + x, 3x - 9y),$$

alors f est une application linéaire et, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$D_{(x,y)} f(h_1, h_2) = f(h_1, h_2) = (2h_1 + 5h_2, -h_2 + h_1, 3h_1 - 9h_2).$$

Exemple 4.12. (Produit scalaire euclidien)

Considérons l'application $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par

$$f(x, y) = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Alors f est bilinéaire et sa différentielle au point (x, y) est donnée par

$$\forall (h, k) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad D_{(x,y)} f(h, k) = \langle x, k \rangle + \langle h, y \rangle.$$

Proposition 4.13 (Différentielle et applications à valeurs dans un espace produit). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{p_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{p_k}$ définie pour tout $x \in \Omega$ par

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x)).$$

Alors f est différentiable en $x_0 \in \Omega$ si et seulement si les fonctions $f_1, \dots, f_k$ le sont. Dans ce cas, la différentielle de f en x_0 est donnée en fonction des différentielles des fonctions f_k en x_0 par la formule

$$D_{x_0} f : h \mapsto D_{x_0} f(h) = (D_{x_0} f_1(h), \dots, D_{x_0} f_k(h)).$$



Démonstration. [Exercice.](#)

□