3 D'un lieu à l'autre : la continuité des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

3.1 Fonctions de plusieurs variables (exemples pour $(n,p) = (2,1)$)

A partir de maintenant, nous allons considérer des fonctions de plusieurs variables qui sont assez difficiles à représenter graphiquement. Il est important de garder en tête le cas des fonctions de deux variables réelles $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. En effet, celles-ci peuvent être représentées graphiquement dans un espace de dimension 3 muni d'un repère $(O; i, j, k)$:

- l'ensemble de définition D_f de f est une partie de $\mathbb{R}^2$ et peut donc être représenté comme un ensemble de point du plan ;
- habituellement, on représente le graphe de f, c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathcal{G}_f = \left\{(x, y, f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D_f\right\}$$

sous la forme d'une nappe/surface de $\mathbb{R}^3$;

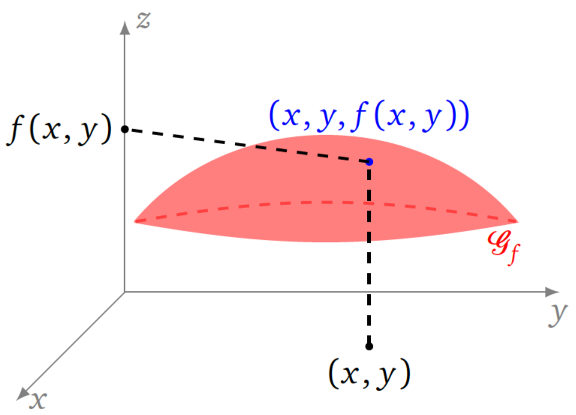

FIGURE 2 : Représentation d'un graphe $\mathcal{G}_f$

Par exemple, la fonction $f : (x,y) \mapsto \ln(1+x+y)$ est définie sur l'ensemble

$$D_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1+x+y > 0\},$$

et la fonction $g : (x,y) \mapsto \exp\left(\frac{x+y}{x^2-y}\right)$ est définie sur l'ensemble

$$D_g := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y \neq 0\}.$$

Ces ensembles de définitions sont représentés sur la figure 3.

La figure 4 présente trois exemples très simples de représentation graphiques de fonctions à deux variables.

Une fonction peut avoir un comportement assez compliqué, avec différents extrema locaux comme celle représentée sur la figure 5

On peut parfois revenir à l'étude d'une fonction à une seule variable réelle, en fixant par exemple $y = b$ (resp. $x = a$) et étudiant $x \mapsto f(x,b)$ (resp. $y \mapsto f(a,y)$) (cf. figure 6), ou en

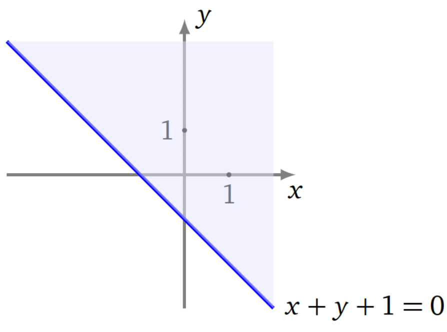

FIGURE 3 : Représentation graphique de D_f (demi-plan bleu clair) et D_g (en dehors de la parabole rouge)

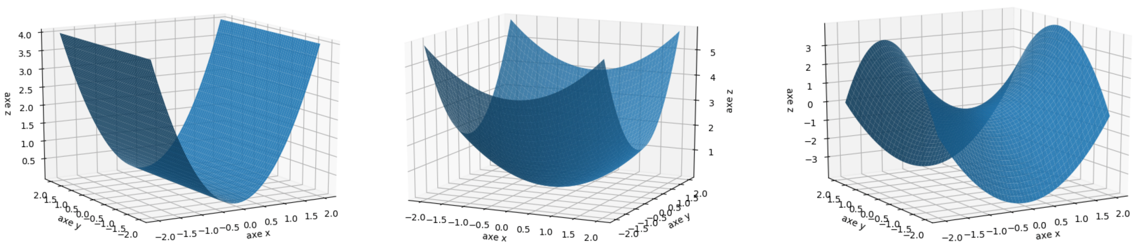

FIGURE 4 : Représentation graphique de $(x, y) \mapsto x^2$, $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_2^2 = x^2 + y^2$ et $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$

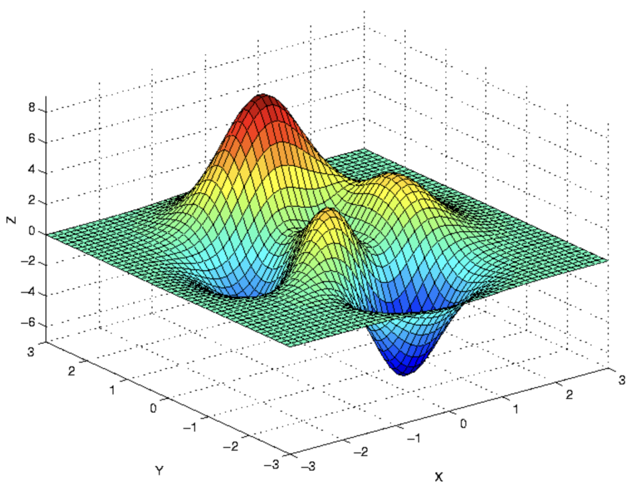

FIGURE 5 : Exemple de graphe avec des extrema locaux

suivant une autre courbe du plan $(x(t), y(t))$ (par exemple une autre droite) et en étudiant $t \mapsto f(x(t), y(t))$. Le nombre infini de ces courbes explique pourquoi il est si difficile d'étudier f contrairement au cas des fonctions à une variable réelle. Une illustration est donnée sur la figure 7

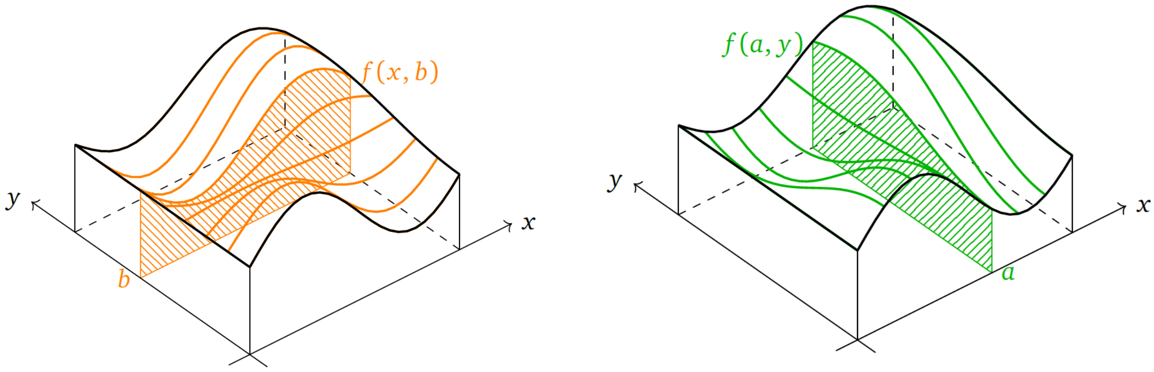

FIGURE 6 : Représentations en tranches du graphe d'une fonction de deux variables

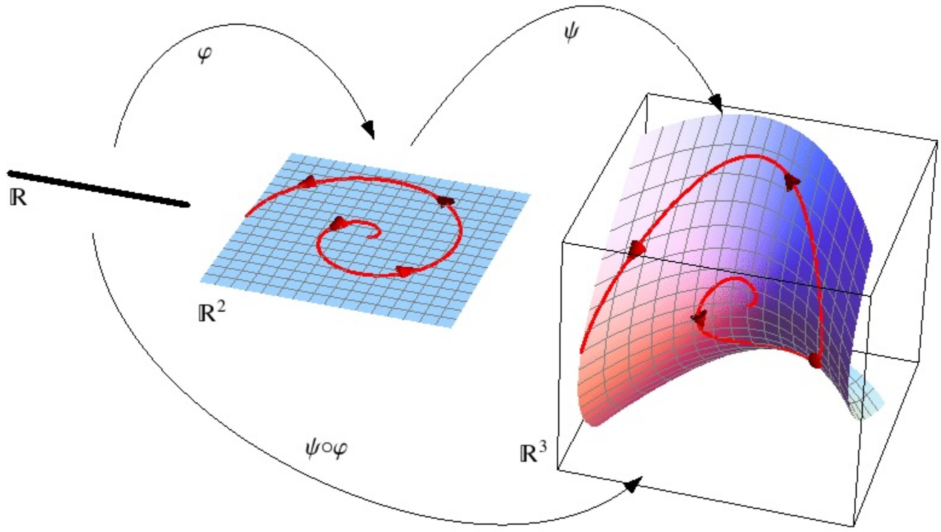

FIGURE 7 : Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (courbe, pas nécessairement une droite) et $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$(ou $\mathbb{R}$) (nappe/surface) alors $\psi \circ \varphi$ est une courbe sur la surface.

3.2 Limite d'une fonction

Les définitions suivantes généralisent celles vue sur $\mathbb{R}$ dans les cours précédents.

Définition 3.1 (Limite d'une fonction en un point). *Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et x_0 un point adhérent à E. On dit que f a pour limite $y_0 \in \mathbb{R}^p$ quand $x \to x_0$ dans E, et on note $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}} f(x) = y_0$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in E, \quad \|x - x_0\|_2 < \delta \Rightarrow \|f(x) - y_0\|_2 < \varepsilon$$

✎ **Remarque 3.2.** Il est facile (et formateur) de montrer que la définition de limite ne dépend pas de la norme considérée, si celle-ci est équivalente à $\|\cdot\|_2$ (Exercice).

Remarque 3.3. Comme dans le cas des suites, la convergence de f vers y_0 quand $x \to x_0$ est équivalente avec la convergence de chacune de ses composantes vers celles de y_0, autrement dit, si $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \in \mathbb{R}^p$ et $y_0 = (y_1, \dots, y_p)$, alors

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in E}} f(x) = y_0 \iff \forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in E}} f_i(x) = y_i.$$

Il est facile de montrer (Exercice) le résultat suivant portant sur l'unicité et les opérations sur les limites. La preuve est la même que dans le cas $n = p = 1$.

Proposition 3.4 (Unicité et opérations sur les limites). *Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $g : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et x_0 un point adhérent à E.*

1. *(Unicité) Si la limite $y_0 \in \mathbb{R}^p$ de f en x_0 existe, alors cette limite est unique.*
2. *(Somme) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0'$, alors $\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = y_0 + y_0'$.*
3. *(Produit) Soit $p = 1$. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0'$, alors $\lim_{x\to x_0} (fg)(x) = y_0 y_0'$.*
4. *(Quotient) Soit $p = 1$. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0' \neq 0$, alors $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f}{g}(x)(x) = \dfrac{y_0}{y_0'}$.*
5. *(Composée) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ où y_0 est un point adhérent à $\mathrm{Im}(f)$, et $g : \mathrm{Im}(f) \to \mathbb{R}^p$ est telle que $\lim_{y\to y_0} g(y) = z_0$, alors $\lim_{x\to x_0} g\circ f(x) = z_0$.*

Exemple 3.5. Il est essentiel de comprendre que $x \to x_0$ signifie que x tend vers x_0 de toutes les façons possibles. Par exemple, considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}.$$

On souhaite étudier la limite de f au point $(0,0)$ adhérent à $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Alors, si $y = ax$ avec $a \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire si on se déplace sur une droite passant par l'originie, on a, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f(x,y) = f(x,ax) = \frac{a^2x^3}{x^2 + a^4x^4} = \frac{a^2x}{1 + a^4x^2},$$

et donc $\lim_{x\to 0} f(x,ax) = 0$. Cela ne veut pas dire que la limite de f en $(0,0)$ est 0. En effet, soit $x \in \mathbb{R}^*$, alors

$$f(x^2,x) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2},$$

et ainsi $\lim_{x\to 0} f(x^2,x) = \frac{1}{2}$, ce qui montre par unicité que f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

3.3 Fonctions continues

Définition 3.6 (Fonction continue/uniformément continue). *Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $x_0 \in E$.*
• *On dit que f est continue en x_0 si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = f(x_0)$, c'est-à-dire*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in E, \quad \|x - x_0\|_2 < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_2 < \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur E si f est continue en tout point $x_0 \in E$.
• *On dit que f est uniformément continue sur E si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall (x, y) \in E^2, \quad \|x - y\|_2 < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_2 < \varepsilon.$$

Remarque 3.7 (Fonction discontinue/non-uniformément continue). On dit donc que f est discontinue en x_0 si

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \delta > 0, \quad \exists x \in E, \quad \|x - x_0\|_2 < \delta \text{ et } \|f(x) - f(x_0)\|_2 \geq \varepsilon.$$

On dit que f n'est pas uniformément continue si

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \delta > 0, \quad \exists (x, y) \in E^2, \quad \|x - y\|_2 < \delta \text{ et } \|f(x) - f(y)\|_2 \geq \varepsilon.$$

Remarque 3.8 (Invariance par rapport à la norme). Par l'équivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, on pourrait choisir une norme différente sur $\mathbb{R}^n$ et sur $\mathbb{R}^p$ sans changer la continuité (uniforme) de f.

Proposition 3.9 (Uniforme continuité des normes). *Toute norme sur $\mathbb{R}^n$ est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\varepsilon > 0$, alors on choisit $\delta = \varepsilon$. On a donc, par la deuxième inégalité triangulaire, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$,

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| < \delta = \varepsilon,$$

ce qui prouve l'uniforme continuité de $\|\cdot\|$. □

Proposition 3.10 (Continuité des coordonnées). *Soit $p > 1$ et $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $x \mapsto f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$. Soit $x_0 \in E$, alors f est continue en x_0 si et seulement si $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$, f_i est continue en x_0.*

Démonstration. Même preuve que pour la limite d'une suite à plusieurs coordonnées. □

Proposition 3.11 (Continuité des applications linéaires en dimension finie). *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire, alors il existe $k > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\|f(x)\|_2 \leq k\|x\|_2,$$

et, de plus, f est uniformément continue.

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire. Si $f \equiv 0$, alors le résultat est clair. Sinon, pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on peut écrire, avec la matrice $A = (a_{i,j})_{i,j} \in M_{p,n}(\mathbb{R})$, $A \neq 0$,

$$f(x) = Ax = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} x_j, \cdots, \sum_{j=1}^{n} a_{p,j} x_j \right)^T$$

On a ainsi

$$\|f(x)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}||x_j| \leq \left(\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right) \|x\|_2.$$

Il existe donc $k := \left(\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right) > 0$ (car $A \neq 0$) tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|f(x)\|_2 \leq k\|x\|_2$. Montrons maintenant que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\varepsilon > 0$, alors on choisit $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ de telle sorte que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x - y\|_2 < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_2 = \|f(x - y)\|_2 \leq k\|x - y\|_2 < k\delta = \varepsilon,$$

donc f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$. □

Remarque 3.12. D'après le résultat précédent, on voit que si f est linéaire, elle est nécessairement Lipschitzienne (et donc uniformément continue), c'est-à-dire qu'il existe $k > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

Le résultat suivant est obtenu automatiquement à partir de celui portant sur les opérations sur les limites de fonctions.

Proposition 3.13 (Opérations sur les fonctions continues). *Les sommes, produits, quotients (avec dénominateur non-nul) et composées de fonctions continues sont continues.*

Exemple 3.14. Considérons la fonction f définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 + y^5}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

La fonction f est clairement continue comme quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ car $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x^4 + y^4 = 0 \iff x^4 = y^4 = 0 \iff x = y = 0$. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on a

$$0 \leq |f(x, y)| \leq \frac{|x|^5}{x^4 + y^4} + \frac{|y|^5}{x^4 + y^4} = |x|\frac{x^4}{x^4 + y^4} + |y|\frac{y^4}{x^4 + y^4} \leq |x| + |y| = \|(x, y)\|_1 \to 0$$

quand $(x, y) \to (0, 0)$. Par comparaison, on a donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$. On en déduit donc que f est continue en $(0, 0)$, et donc sur $\mathbb{R}^2$.

On obtient aisément les résultats suivants portant sur les opérations sur les fonctions continues.

Proposition 3.15 (Caractérisation séquentielle des fonctions continues). *Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $x_0 \in E$. Alors f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite $(x_k)_k \subset E$ qui converge vers x_0, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_k) = f(x_0)$.*

Démonstration. (Non-donnée en CM / Preuve déjà faite en L1 pour $m = n = 1$). Supposons que f est continue en x_0 et soit $(x_k)_k \subset E$ telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x_0$. Montrons que $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_k) = f(x_0)$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq N, \quad \|f(x_k) - f(x_0)\|_2 < \varepsilon.$$

Nos hypothèses s'écrivent donc :

$$\begin{array}{llll} \forall \varepsilon > 0, & \exists \delta > 0, & \forall x \in E, & \|x - x_0\|_2 < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_2 < \varepsilon \quad (f \text{ continue}) \\ \forall \varepsilon > 0, & \exists N \in \mathbb{N}, & \forall k \geq N, & \|x_k - x_0\|_2 < \varepsilon \qquad\qquad\qquad\qquad\quad (x_k \to x_0). \end{array}$$

Soit $\varepsilon > 0$, alors par continuité de f, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_2 < \varepsilon$. De plus, par convergence de la suite $(x_k)_k$, pour un tel $\delta > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$, $\|x_k - x_0\| < \delta$. Ceci implique que $\|f(x_k) - f(x_0)\| < \varepsilon$ pour tout $k \geq N$ et on a montré que la suite $(f(x_k))_k$ converge vers $f(x_0)$.
Supposons maintenant que pour toute suite $(x_k)_k$ convergeant vers x_0, la suite $(f(x_k))_k$ converge vers $f(x_0)$. Montrons que f est continue en x_0. Raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas continue en x_0. Il existerait donc $\varepsilon > 0$ et $(x_k)_k$ telle que pour tout $k \geq 1$, $\|x_k - x_0\| \leq \frac{1}{k}$ et $\|f(x_k) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$, ce qui contredit l'hypothèse. □

Exemple 3.16. Considérons la fonction f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^4}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Soit $(x_k)_{k\geq 1}$ la suite définie par $x_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ et tendant vers $(0,0)$ quand $k \to +\infty$. Alors on a

$$\lim_{k\to+\infty} f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = 8 \neq f(0,0),$$

et ainsi f n'est pas continue en $(0,0)$.
Alternativement, on passe en coordonnées polaires en posant $x = r\cos\theta$ et $y = \sin\theta$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, on obtient

$$f(x,y) = \frac{(r\cos\theta + r\sin\theta)^4}{r^4\cos^4\theta + r^4\sin^4\theta} = \frac{(\cos\theta + \sin\theta)^4}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}$$

qui dépend de θ et ne tend pas vers 0 quand $r \to 0$. En effet, il suffit de choisir $\theta = 0$ et le quotient vaut $1 \neq 0$.

Théorème 3.17 (Weierstrass, théorème des bornes atteintes). *Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application continue et $K \subset E$ un compact non-vide de $\mathbb{R}^n$. Alors $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}^p$. Ainsi, toute fonction continue $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sur un ensemble compact K atteint ses bornes sur K.*

Démonstration. Soit $K \subset E$ un compact de $\mathbb{R}^n$ et $(y_k)_k \subset f(K)$. Montrons que $(y_k)_k$ admet une sous-suite convergente dans $f(K)$. On sait qu'il existe une suite $(x_k)_k \subset K$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $y_k = f(x_k)$. Comme K est compact, $(x_k)_k$ admet une sous-suite $(x_{\varphi(k)})_k$ convergente vers $x \in K$. La suite $(f(x_{\varphi(k)}))_k$ est une sous-suite de $(y_k)_k$. Comme f est continue sur E, $(f(x_{\varphi(k)}))_k$ converge vers $y := f(x) \in f(K)$. On en déduit donc que $f(K)$ est compact.

Supposons maintenant $p = 1$. L'ensemble $f(K)$ est un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}$. Comme il est non-vide car $K \neq \emptyset$ et borné, il admet donc une borne supérieure et une borne inférieure

$$m = \inf_{x \in K} f(x), \quad M = \sup_{x \in K} f(x).$$

Comme m et M sont des limites de suites de $f(K)$ et que $f(K)$ est fermé, $m = \min_{x \in K} f(x) \in f(K)$ et $M = \max_{x \in K} f(x) \in f(K)$ et f atteint donc ses bornes sur K. □

Remarque 3.18. Le résultat est faux si K est seulement borné ou fermé.
✎ Trouvez des contre-exemples !

Remarque 3.19. La réciproque est fausse, c'est-à-dire que le fait que l'image d'un compact soit compacte n'assure pas que f soit continue. On peut par exemple définir $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ x - 2 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Alors on a $f([0,3]) = [0,1]$ mais f est discontinue en 1 et 2.

Remarque 3.20. L'image réciproque d'un compact par une application continue n'est pas nécessairement compacte !! En effet, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$. Alors f est continue, $[-1,1]$ est compact et $f^{-1}([-1,1]) = \mathbb{R}$ qui n'est pas compact.

Théorème 3.21 (Heine, continuité uniforme sur un compact). *Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application continue et $K \subset E$ un compact non-vide de $\mathbb{R}^n$. Alors f est uniformément continue sur K.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde et on suppose que f n'est pas uniformément continue sur K, alors

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \delta > 0, \quad \exists (x, x') \in K^2, \quad \|x - x'\|_2 < \delta \text{ et } \|f(x) - f(x')\|_2 \geq \varepsilon.$$

Soit un tel $\varepsilon > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ choisissons $\delta_n = \frac{1}{2^n}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(x_n, x'_n) \in K^2$ tels que $\|x_n - x'_n\|_2 < \frac{1}{2^n}$ et $\|f(x_n) - f(x'_n)\|_2 > \varepsilon$.
Mais comme K^2 est compact comme produit de compacts, il existe une sous-suite $\{(x_{\varphi(n)}, x'_{\varphi(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $(\ell, \ell') \in K^2$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - x'_n\|_2 < \frac{1}{2^n}$, alors $\lim_{n \to +\infty} x_n - x'_n = 0$ et donc $\ell = \ell'$, et par continuité de f et de la norme,

$$\varepsilon \leq \lim_{n \to +\infty} \|f(x_{\varphi(n)}) - f(x'_{\varphi(n)})\|_2 = \|\ell - \ell'\|_2 = 0,$$

ce qui est contradictoire avec le fait que $\varepsilon > 0$. On en déduit donc que f est uniformément continue sur K. □

Application : preuve de l'équivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrons que $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_\infty$. Ainsi, par transitivité, toute autre norme $\|\cdot\|'$ sera aussi équivalente à la norme infinie, et donc on aura $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$.
Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors on a, en notant $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$\|x\| = \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \leq \|x\|_\infty \sum_{i=1}^n \|e_i\| = M\|x\|_\infty,$$

en notant que $M = \sum_{i=1}^n \|e_i\|$ est indépendant de x.
Soit $S_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1\}$ la sphère unité pour la norme infinie. Alors S_∞ est un compact de $\mathbb{R}^n$ en tant que fermé borné de $\mathbb{R}^n$ pour la norme infinie. Soit $f : S_\infty \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \|x\|$. Alors f est continue (car c'est une norme restreinte à S_∞) et atteint donc son minimum m sur S_∞. Comme, pour tout $x \neq 0$, $\frac{x}{\|x\|_\infty} \in S_\infty$, on a

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \geq m,$$

et donc, par homogénéité de la norme, on obtient $\|x\| \geq m\|x\|_\infty$. Cette inégalité est évidente pour $x = 0$.
On a donc montré que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$m\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq M\|x\|_\infty,$$

ce qui veut dire que $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_\infty$.

4 Ressentir la pente : les applications différentiables

On rappelle que si $I \neq \emptyset$ est un intervalle et x_0 est un point intérieur à I, une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 si le quotient

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad (h \neq 0)$$

tend vers une limite finie $\ell = f'(x_0)$ lorsque $h \to 0$, ce qui s'écrit aussi : $\exists \ell \in \mathbb{R}$, $\forall h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$,

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \ell h + o(h),$$

ou bien, quand $x \to x_0$, en posant $x = x_0 + h$, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$. Le nombre dérivée $f'(x_0)$ est alors le coefficient directeur de la tangente au graphe de f au point x_0 qui est elle-même d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

Remarque 4.1 (**Négligeabilité**)**.** On rappelle que si $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, où $(0,\dots,0) \in \bar{E}$ et $N : E \to \mathbb{R}_+$ sont des applications, on dit que le vecteur $f(x)$ est négligeable devant le réel $N(x)$ au voisinage du point $(0,\dots,0)$, et on écrit $f(x) = o(N(x))$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in E, \quad \|x\|_2 < \delta \Rightarrow \|f(x)\|_2 \leq \varepsilon N(x),$$

c'est-à-dire si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\|f(x)\|_2}{N(x)} = 0$.

4.1 Définition de la différentiabilité et premiers exemples

Définition 4.2 (**Différentiabilité en un point**)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^p$ une application. On dit que f est différentiable au point x_0 s'il existe une application linéaire (continue) $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^p)$ telle que, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant $x_0 + h \in \Omega$, on ait, quand $h \to 0$,*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + L(h) + o(\|h\|_2). \tag{4.1}$$

Remarque 4.3. Cette définition signifie que si f est différentiable en x_0, alors on peut approcher au voisinage de x_0 l'accroissement $h \mapsto f(x_0+h) - f(x_0)$ par une application linéaire L, au sens où la différence est négligeable devant $\|h\|_2$ lorsque $h \to 0$, c'est-à-dire

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\|f(x_0+h)-f(x_0)-L(h)\|_2}{\|h\|_2} = 0.$$

L'égalité (4.1) peut aussi s'écrire

$$f(x_0+h) = f(x_0) + L(h) + \|h\|_2 \varepsilon(h), \quad \text{avec} \quad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \|\varepsilon(h)\|_2 = 0.$$

Là encore, la notion de différentiabilité ne dépend pas de la norme choisie.