6.6 Quelques exemples de calculs d'extrema

6.6.1 Extrema libres, sur l'espace tout entier

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Cherchons les points critiques de f :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x,$$

et donc, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla_{(x,y)} f = 0 \iff \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$$

Ainsi, si (x,y) est un point critique, alors nécessairement $x^4 = x$ et donc $x(x^3 - 1) = 0$, c'est-à-dire que $x = 0$ ou $x = 1$. Ainsi,

- si $x = 0$, alors $0 = y$ et $y^2 = 0$, donc $y = 0$;
- si $x = 1$, alors $1 = y$ et $y^2 = 1$, donc $y = 1$.

Les points critiques sont donc $(0,0)$ et $(1,1)$.
Cherchons maintenant la nature de ces points critiques en déterminant la hessienne de f. On a, comme $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -3.$$

On a donc

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

- On a donc, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, $D^2_{(0,0)} f((h,k),(h,k)) = -6hk$ qui, pour tout $\varepsilon \neq 0$, est strictement positif pour $(h,k) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ et strictement négatif pour $(h,k) = (\varepsilon, \varepsilon)$. Ainsi $(0,0)$ est un point selle.
  Alternativement, le polynôme caractéristique de $H_f(0,0)$ *est*

  $$P(X) = X^2 - 9$$

  qui admet 3 *et* -3 *comme racine. Ainsi, les deux valeurs propres de la matrice sont de signe opposé, donc* $(0,0)$ *est un point selle de* f.
  On peut aussi calculer $\det(H_f(0,0)) = -9 < 0$ *et en déduire automatiquement que les deux valeurs propres de cette matrice sont de signes opposés, et que l'on a donc bien un point selle.*

- On a, $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$,

  $$D_{(1,1)} f((h,k),(h,k)) = 6h^2 + 6k^2 - 6hk = 6(h^2 + k^2 - hk) = 6\left(\left(h - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3k^2}{4}\right) \geq 0$$

  et $D_{(1,1)} f((h,k),(h,k)) = 0 \iff k = 0$ et $h = \frac{k}{2} = 0$, donc cette forme quadratique est bien définie positive, ce qui veut dire que f admet au point $(1,1)$ un minimum local.
  Alternativement, le polynôme caractéristique de $H_f(1,1)$ *est*

  $$P(X) = (X-6)^2 - 9 = (X-9)(X-3),$$

donc les valeurs propres de la matrice sont $9 > 0$ *et* $3 > 0$*, ce qui prouve qu'elle est définie positive et donc que* f *admet un minimum local strict en* $(1,1)$.
Sinon, on peut aussi calculer $\det(H_f(1,1)) = 27 > 0$ *ce qui implique que les valeurs propres ont même signe, puis* $\mathrm{Tr}(H_f(1,1)) = 12 > 0$ *et donc que ces valeurs propres sont toutes deux strictement positives, d'où l'existence d'un minimum local strict en ce point.*
Il ne s'agit pas d'un minimum global car, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x,y) = \lim_{x\to-\infty} x^3 + y^3 - 3xy = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 + \frac{y^3}{x^3} - \frac{3y}{x^2}\right) = -\infty.$$

6.6.2 Extrema sur un compact

On souhaite trouver les extrema de $f : K \to \mathbb{R}$ *sur un compact* K *Comme on a* $\overline{K} = K = \mathring{K} \sqcup \partial K$*, il faut étudier ces extrema sur :*

1. $\mathring{K}$*, l'intérieur de* K*, en utilisant les points critiques et la hessienne,*

2. ∂K*, le bord de* K*, en écrivant explicitement ce que devient la fonction. Par exemple si* $n = 2$ *et* $\partial K = \{(x(t), y(t)) : t \in I\}$ *est une courbe plane, alors on étudiera la fonction d'une variable réelle* $t \mapsto f(x(t), y(t))$ *sur* I *(variations si nécessaire, minima, maxima).*

Il suffira ensuite de conclure en fonction de ce que l'on aura trouvé sur ces deux ensembles (quel est le plus petit (resp. grand) des minima (resp. maxima) locaux trouvés et en quels points sont-ils atteints).

On considère la boule euclidienne unité fermée de $\mathbb{R}^2$ $K = \overline{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ et $f : K \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 - y^2$. Cherchons les extrema de f sur K. Comme K est compact et f continue comme somme de fonctions continues, alors f atteint ses bornes sur K d'après le théorème des borners atteintes de Weierstrass.

- On cherche les extrema locaux parmi les points intérieurs à K, c'est-à-dire sur $B(0,1)$. Les points critiques (x,y) de f sur l'ouvert $B(0,1)$ vérifient

$$\nabla_{(x,y)} f = 0 \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

  et on trouve donc que $(x,y) = (0,0) \in B(0,1)$ est en fait l'unique point critique de f. La hessienne de f est donnée par

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

  et donc les valeurs propres de f sont 2 et -2, de signes opposés, donc $(0,0)$ est un point selle de f. Comme f est continue sur le compact K (car c'est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$), f y admet un minimum et un maximum. Ceux-ci sont donc sur le bord de K.

- On étudie f sur $\partial K = \partial\overline{B}(0,1) = S(0,1)$. Pour cela, on remarque que

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = \{(\cos t, \sin t) : t \in [0,2\pi]\}.$$

On a donc, pour tout $t \in [0, 2\pi]$,

$$f(\cos t, \sin t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t).$$

Il ne reste plus qu'à étudier la fonction $t \mapsto \cos(2t)$ sur $[0, 2\pi]$ pour trouver les points pour lesquels le maximum et le minimum est atteint.
Le maximum vaut naturellement 1 quand $2t = 0[2\pi]$, c'est-à-dire quand $t = 0[\pi]$, ce qui correspond aux points $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.
Le minimum vaut -1 atteint quand $2t = \pi[2\pi]$, c'est-à-dire quand $t = \frac{\pi}{2}[\pi]$, ce qui correspond aux points $(0, 1)$ et $(0, -1)$.

6.6.3 Etude des points critiques "à la main"

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 2x^3 - y^4 - 3x^2$. Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\nabla_{(x,y)} f = (0, 0) \iff (6x^2 - 6x, -4y^3) = (0, 0) \iff x \in \{0, 1\} \text{ et } y = 0,$$

et les points critiques de f sont $(0, 0)$ et $(1, 0)$. Dans ce cas, on obtient

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

et on ne peut donc rien conclure. Il faut étudier f au voisinage de ces points.

- Au voisinage de $(0, 0)$. On écrit, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

  $$f(x, y) = x^2(2x - 3) - y^4.$$

  Pour tout x tel que $|x| \leq 1$, on a $2x - 3 \leq 0$ et donc $f(x, y) \leq 0 = f(0, 0)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in [-1, 1]$. Ainsi, f admet un maximum local en $(0, 0)$.

- Au voisinage de $(1, 0)$. On remarque que, pour tout $y \in \mathbb{R}$ (et en particulier dans un voisinage de 0),

  $$f(1, y) = -1 - y^4 \leq -1 = f(1, 0).$$

  Et, pour tout x tel que $|x - 1| \leq 1$ (c'est-à-dire proche de 1), on a

  $$f(x, 0) = (x - 1)^2(2x + 1) - 1 \geq -1 = f(1, 0).$$

  Ainsi, f admet un point selle en $(1, 0)$.

Remarque : Pour déterminer dans quelle direction il faut étudier le signe de f au voisinage du point critique x_0 dans le cas où une valeur propre λ est nulle, on cherche un vecteur propre u associé à cette valeur propre et on étudie le signe de $f(x_0 + tu)$ quand $t \in \mathbb{R}$ est assez petit. Dans le deuxième cas précédent, il est clair que $(0, 1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 0, alors que $(1, 0)$ est lui un vecteur propre associé à la valeur propre $6 > 0$. Dans cette dernière direction, il était clair que nous allions trouver un minimum local, ce qui n'était pas clair pour la valeur propre nulle.

6.6.4 Quand la hessienne est nulle (juste mentionné en CM)

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto x^3+y^4-yx^2-xy^2$. On peut montrer que $(0,0)$ est un point critique de f mais que $H_f(0,0)$ est la matrice nulle. Dans ce cas, soit on étudie localement la fonction comme précédemment, soit on développe f au voisinage de $(0,0)$ à l'ordre 3, ce qui donne (Exercice)

$$f(h,k)=h(h^2-hk-k^2)+o(\|(h,k)\|_2^3)$$

et puisque $\varphi(h,k)=h(h^2-hk-k^2)$ a pour valeur, pour tout $\varepsilon>0$, $\varphi(\varepsilon,0)=\varepsilon^3>0$ et $\varphi(-\varepsilon,0)=-\varepsilon^3<0$, on en déduit à cause du changement de signe que $(0,0)$ est un point selle de f.

6.6.5 Pavé de volume fixé et d'aire minimal (non-traité en CM)

On souhaite construire une boîte de volume fixée avec le moins de matière possible (surface minimale).
On considère, pour $V>0$ fixé, un pavé droit de côtés $(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+^*)^3$ et de volume $xyz=V$. On notera donc

$$E=\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+^*)^3 : xyz=V\},$$

et on remarque que $E=f^{-1}(\{V\})$ avec $f:(x,y,z)\mapsto\mathbb{R}$ qui est continue. Comme $\{V\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$, alors E est fermé de $\mathbb{R}^3$ comme image réciproque d'un fermé.
Déterminons les extrema de l'aire total de ce pavé, donnée par $2(xy+yz+xz)$.
On peut exprimer cette aire en fonction uniquement de x et y car $z=\dfrac{V}{xy}$. On obtient donc une aire $A:\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*$, fonction de x et y, donnée par

$$A(x,y)=2\left(xy+\frac{V}{x}+\frac{V}{y}\right).$$

A est différentiable comme somme de fonctions différentiables et on a donc, pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\frac{\partial A}{\partial x}(x,y)=2\left(y-\frac{V}{x^2}\right),\quad \frac{\partial A}{\partial y}(x,y)=2\left(x-\frac{V}{y^2}\right).$$

Ainsi, (x,y) est un point critique si et seulement si

$$y-\frac{V}{x^2}=0\quad\text{et}\quad x-\frac{V}{y^2}.$$

On a donc $y=\frac{V}{x^2}$ et ainsi $x\left(\frac{V}{x^2}\right)^2=V$ et on trouve $x=V^{\frac{1}{3}}$ et donc $y=V^{\frac{1}{3}}$. Le seul point critique de A est donc $(V^{\frac{1}{3}},V^{\frac{1}{3}})$. Etudions la nature de ce point critique. A est deux fois différentiable comme somme de fonctions deux fois différentiable et on a donc, pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}(x,y)=\frac{4V}{x^3},\quad \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}(x,y)=\frac{4V}{y^3},\quad \frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 A}{\partial y\partial x}(x,y)=1$$

et donc, au point $(V^{\frac{1}{3}},V^{\frac{1}{3}})$, on obtient

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}(V^{\frac{1}{3}},V^{\frac{1}{3}})=\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}(V^{\frac{1}{3}},V^{\frac{1}{3}})=4,\quad \frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y}(V^{\frac{1}{3}},V^{\frac{1}{3}})=\frac{\partial^2 A}{\partial y\partial x}(V^{\frac{1}{3}},V^{\frac{1}{3}})=1,$$

et la hessienne de A au point critique est donc

$$H_A(V^{\frac{1}{3}}, V^{\frac{1}{3}}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est $P(X) = (2-X)^2 - 1 = (2-X-1)(2-X+1) = (1-X)(3-X)$ et donc ses valeurs propres sont $\{1,3\} \subset \mathbb{R}_+^*$ et donc $H_A(V^{\frac{1}{3}}, V^{\frac{1}{3}}$ est définie positive, ce qui veut dire que A admet un minimum local strict au point $(V^{\frac{1}{3}}, V^{\frac{1}{3}})$.
Alternativement, on calcule le déterminant qui vaut $15 > 0$*, d'où le fait que les valeurs propres de la matrice sont de même signe, puis la trace qui vaut* $8 > 0$*, et qui implique que les valeurs propres sont toutes deux strictement positives, et que l'on a donc un minimum local strict.*
Comme, de plus, pour y_0 et x_0 fixés,

$$\lim_{x \to 0^+} A(x, y_0) = \lim_{y \to 0^+} A(x_0, y) = \lim_{(x,y) \to (0^+, 0^+)} A(x, y) = +\infty$$

ainsi que

$$\lim_{\|(x,y)\|_\infty \to +\infty} A(x, y) = +\infty,$$

alors $(V^{\frac{1}{3}}, V^{\frac{1}{3}})$ réalise le minimum global de A sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. Le minimum global de l'aire est donc atteint quand

$$(x, y, z) = (V^{\frac{1}{3}}, V^{\frac{1}{3}}, V^{\frac{1}{3}}),$$

c'est-à-dire pour un cube.