CHAPITRE
8

Le polynôme minimal d'une matrice

Sommaire

La caractérisation des matrices diagonalisables donnée par le théorème 7.4.1 porte sur la dimension des sous-espaces propres : une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, l'espace $\mathbb{K}^n$ se décompose en une somme directe de sous-espaces propres de la matrice $\mathbf{A}$.

Dans ce chapitre, nous abordons une autre caractérisation, de nature purement algébrique, qui porte uniquement sur les coefficients de la matrice. Précisément, nous allons montrer qu'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, il existe un polynôme g à coefficients dans $\mathbb{K}$, non nul, scindé, n'ayant que des racines simples et tel que la matrice $\mathbf{A}$ soit racine de g, *i.e.*, $g(\mathbf{A}) = 0$.

§ 1 Préliminaires

8.1.1. Exemple.— Considèrons la projection p sur le plan Π de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = 0$ parallèlement à la droite Δ d'équation $x = y = z$, vue dans l'exemple 5.3.4. La projection p vérifie

$$p(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{x} & \text{si } \mathbf{x} \in \Pi, \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{x} \in \Delta. \end{cases}$$

Ainsi, l'endomorphisme p satisfait, pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^3$, l'équation

$$p^2(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}).$$

De façon équivalente, cela s'exprime en disant que l'endomorphisme $p^2 - p$ est nul, soit :

$$p(p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 0. \tag{8.1}$$

On dit alors que l'endomorphisme p est racine du polynôme $x(x-1)$.

De l'équation (8.1), nous déduisons que l'endomorphisme p est diagonalisable. D'une part, il est immédiat que

$$\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \{\mathbf{0}\}.$$

En effet, si $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(p)$ et $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, alors $p(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ et $p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, d'où $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. D'autre part, pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^3$, on a la décomposition :

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x} - p(\mathbf{x})) + p(\mathbf{x}).$$

L'endomorphisme p satisfaisant l'équation (8.1), on a $\mathbf{x} - p(\mathbf{x}) \in \mathrm{Ker}(p)$ et $p(\mathbf{x}) \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. On montre ainsi que l'on a une somme directe

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}).$$

Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ désignant respectivement les sous-espaces propres associées aux valeurs propres 0 et 1, du théorème 7.4.1, on déduit que l'endomorphisme p est diagonalisable. On pourra remarquer que $\mathrm{Ker}(p)$ correspond à la droite Δ et $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ correspond au plan Π. Si $\mathbf{e}$ est un vecteur de Δ et $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ une base de Π, alors la famille $\mathcal{B} = (\mathbf{e}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ et

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.1.2. Exemple. — Considérons la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{A}$ vérifie la relation $\mathbf{A}^2 = \mathbf{1}_3$ et donc l'équation :

$$(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3)(\mathbf{A} + \mathbf{1}_3) = \mathbf{0}. \tag{8.2}$$

On dit alors que la matrice $\mathbf{A}$ est racine du polynôme $(x-1)(x+1)$. De la même façon que dans l'exemple précédent, de l'équation (8.2), on déduit une décomposition de l'espace $\mathbb{R}^3$ en une somme directe de noyaux :

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3) \oplus \mathrm{Ker}(\mathbf{A} + \mathbf{1}_3).$$

Les deux sous-espaces de cette décomposition correspondent aux sous-espaces propres de la matrice $\mathbf{A}$ associés aux valeurs propres 1 et -1 respectivement. D'après le théorème 7.4.1, on en déduit que la matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable. De plus, ayant

$$\mathbf{A} + \mathbf{1}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

la matrice $\mathbf{A}+\mathbf{1}_3$ est de rang 2, par le théorème du rang, on en déduit que $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}+\mathbf{1}_3)$ est de dimension 1. Il en découle que le noyau $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-\mathbf{1}_3)$ est alors de rang 2. En d'autres termes, on a $\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(-1) = 1$ et $\mathrm{mult}_{\mathrm{geo}}(1) = 2$. La matrice $\mathbf{A}$ étant diagonalisable, elle est alors semblable à la matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.1.3 Exercice.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geq 2$, vérifiant

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{1}_n)(\mathbf{A}-3\mathbf{1}_n) = \mathbf{0}.$$

1. Montrer que $\mathbf{A}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que la matrice $\mathbf{A}$ est inversible.
3. Exprimer l'inverse $\mathbf{A}^{-1}$ en fonction de la matrice $\mathbf{A}$.

8.1.4 Exercice.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geq 3$, vérifiant

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{1}_n)(\mathbf{A}-3\mathbf{1}_n)(\mathbf{A}-5\mathbf{1}_n) = \mathbf{0}.$$

1. Montrer que $\mathbf{A}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que la matrice $\mathbf{A}$ est inversible.
3. Exprimer l'inverse $\mathbf{A}^{-1}$ en fonction de la matrice $\mathbf{A}$.

§ 2 Polynômes de matrices

8.2.1. Définition.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Étant donné un polynôme

$$p = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

de $\mathbb{K}[x]$, on définit la matrice

$$P(\mathbf{A}) = a_m\mathbf{A}^m + a_{m-1}\mathbf{A}^{m-1} + \cdots + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbf{1}_n.$$

Noter que si p est le polynôme constant égal à 1, alors $p(\mathbf{A}) = \mathbf{1}_n$. On associe ainsi à un polynôme p de $\mathbb{K}[x]$, un *polynôme de matrices* $p(\mathbf{A})$. Cette correspondance est compatible aux opérations d'addition et de multiplication sur les polynômes, on a :

8.2.2 Proposition.— Soient f et g deux polynôme de $\mathbb{K}[x]$. Alors, pour toute matrice $\mathbf{A}$, on a

i) $(f+g)(\mathbf{A}) = f(\mathbf{A}) + g(\mathbf{A})$,
ii) $(fg)(\mathbf{A}) = f(\mathbf{A})g(\mathbf{A})$.

Preuve. Considérons deux polynômes f et g définis par

$$f = \sum_{i=1}^{l} a_i x^i, \qquad g = \sum_{i=1}^{m} b_i x^i.$$

Quitte à rajouter des coefficients nuls, on peut supposer que $l = m$. On a

$$\begin{aligned}(f+g)(\mathbf{A}) &= (\sum_{i=1}^{l}(a_i+b_i)x^i)(\mathbf{A})\\ &= \sum_{i=1}^{l}(a_i+b_i)\mathbf{A}^i\\ &= \sum_{i=1}^{l} a_i\mathbf{A}^i + \sum_{i=1}^{l} b_i\mathbf{A}^i\\ &= f(\mathbf{A}) + g(\mathbf{A}).\end{aligned}$$

Par distributivité du produit matriciel par rapport à l'addition, cf. 3.2.1, on a

$$\begin{aligned}(fg)(\mathbf{A}) &= (\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l} a_i b_j x^{i+j})(\mathbf{A})\\ &= (\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l} a_i b_j \mathbf{A}^{i+j})\\ &= \sum_{i=1}^{l} a_i\mathbf{A}^i \sum_{j=1}^{l} b_j\mathbf{A}^j\\ &= f(\mathbf{A})g(\mathbf{A}).\end{aligned}$$

□

De la seconde propriété, on déduit les polynômes d'une matrice $\mathbf{A}$ commutent entre eux :

8.2.3 Proposition.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tous polynômes f et g de $\mathbb{K}[x]$, les matrices $f(\mathbf{A})$ et $g(\mathbf{A})$ commutent :

$$f(\mathbf{A})g(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A})f(\mathbf{A}).$$

8.2.4 Exercice.— Montrer la proposition 8.2.3.

8.2.5. Exemple.— Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $p = x^2 + x + 1$, alors

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{A} + \mathbf{1}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.2.6. Polynômes annulateurs.— Un polynôme non nul q de $\mathbb{K}[x]$ est dit *annulateur* d'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si la matrice $q(\mathbf{A})$ est nulle ; on dit aussi que $\mathbf{A}$ est racine du polynôme q.

8.2.7. Exemple : polynôme annulateur des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.— Toute matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ admet pour polynôme annulateur, le polynôme

$$p_{\mathbf{A}} = x^2 - \mathrm{trace}(\mathbf{A})x + \det(\mathbf{A}).$$

Pour montrer que $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, on peut procéder par un calcul direct comme dans la preuve initiale de Cayley, voir figure 8.3. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, alors on montre que

$$\mathbf{A}^2 - \mathrm{trace}(\mathbf{A})\mathbf{A} + \det(\mathbf{A})\mathbf{1}_2 = \mathbf{0}.$$

8.2.8 Proposition.— Toute matrice de possède un polynôme annulateur.

Preuve. Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension n^2. Par suite, toute famille de n^2+1 matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est liée ; c'est le cas en particulier de la famille

$$(\mathbf{1}_n, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^{n^2}).$$

Il existe donc des scalaires $a_0, \ldots, a_{n^2}$ non tous nuls, tels que

$$a_0\mathbf{1}_n + a_1\mathbf{A} + \cdots + a_{n^2}\mathbf{A}^{n^2} = \mathbf{0}.$$

Le polynôme $g = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n^2}x^{n^2}$ est ainsi non nul et annulateur de la matrice $\mathbf{A}$. □

8.2.9 Proposition.— Soient $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et g un polynôme annulateur de $\mathbf{A}$. Alors, toute valeur propre de $\mathbf{A}$ est racine du polynôme g.

Preuve. Soit $g = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$ un polynôme annulateur de $\mathbf{A}$. La matrice $g(\mathbf{A})$ est nulle :

$$a_0\mathbf{1}_n + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 + \cdots + a_m\mathbf{A}^p = \mathbf{0}. \tag{8.3}$$

Soient λ une valeur propre de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{x}$ un vecteur propre associé, *i.e.*, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. D'après l'équation (8.3), on a

$$(a_0\mathbf{1}_n + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 + \cdots + a_m\mathbf{A}^m)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Or $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, d'où pour tout entier naturel k, $\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}$ et

$$(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_m\lambda^m)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Comme le vecteur $\mathbf{x}$ est non nul, on en déduit que $g(\lambda)$ est nul. □

Attention, la réciproque de ce résultat est fausse en général ; toutes les racines d'un polynôme annulateur de $\mathbf{A}$ ne sont pas toujours valeurs propres de $\mathbf{A}$. Par exemple, la matrice identité $\mathbf{1}_n$ est racine du polynôme $x(x-1)$, car $\mathbf{1}_n^2 = \mathbf{1}_n$, alors que 0 n'est pas une valeur propre de la matrice identité.

8.2.10 Exercice.— 1. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de la matrice suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

2. La matrice $\mathbf{A}$ est-elle diagonalisable ?

3. Déterminer le spectre de $\mathbf{A}$ ainsi qu'une base pour chaque sous-espace propre.

§ 3 Le lemme de décomposition en noyaux

La matrice $\mathbf{A}$ de l'exemple 8.1.2 satisfait la relation

$$(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3)(\mathbf{A} + \mathbf{1}_3) = \mathbf{0}.$$

Nous en avons déduit que

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3) \oplus \mathrm{Ker}(\mathbf{A} + \mathbf{1}_3).$$

Dans cette section, nous montrons que ceci est une conséquence du résultat général suivant.

8.3.1 Proposition. — Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soient f_1, f_2 deux polynômes de $\mathbb{K}[x]$ premiers entre eux. Alors

$$\mathrm{Ker}(f_1 f_2)(\mathbf{A}) = \mathrm{Ker}(f_1(\mathbf{A})) \oplus \mathrm{Ker}(f_2(\mathbf{A})).$$

Si de plus, le polynôme $f_1 f_2$ est annulateur de $\mathbf{A}$, on a

$$\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}(f_1(\mathbf{A})) \oplus \mathrm{Ker}(f_2(\mathbf{A})).$$

Preuve. Les polynômes f_1 et f_2 étant premiers entre eux, d'après l'identité de Bézout, théorème 1.5.13, il existe des polynômes h_1 et h_2 de $\mathbb{K}[x]$ tels que :

$$f_1 h_1 + f_2 h_2 = 1.$$

En conséquence, nous avons la relation matricielle suivante :

$$f_1(\mathbf{A})h_1(\mathbf{A}) + f_2(\mathbf{A})h_2(\mathbf{A}) = \mathbf{1}_n. \tag{8.4}$$

Montrons l'égalité $\mathrm{Ker}(f_1(\mathbf{A})) \oplus \mathrm{Ker}(f_2(\mathbf{A})) = \mathrm{Ker}((f_1 f_2)(\mathbf{A}))$. Le noyau $\mathrm{Ker}(f_2(\mathbf{A}))$ est contenu dans $\mathrm{Ker}(f_1(\mathbf{A})f_2(\mathbf{A}))$, de la même façon $\mathrm{Ker}(f_1(\mathbf{A}))$ est contenu dans $\mathrm{Ker}(f_1(\mathbf{A})f_2(\mathbf{A})) = \mathrm{Ker}(f_2(\mathbf{A})f_1(\mathbf{A}))$, car les polynômes $f_1(\mathbf{A})$ et $f_2(\mathbf{A})$ commutent entre eux. Ainsi

$$\mathrm{Ker}(f_1(\mathbf{A})) + \mathrm{Ker}(f_2(\mathbf{A})) \subseteq \mathrm{Ker}((f_1 f_2)(\mathbf{A})).$$

Inversement, si $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}((f_1 f_2)(\mathbf{A}))$, alors d'après la relation (8.4), il existe une décomposition

$$\mathbf{x} = f_1(\mathbf{A})h_1(\mathbf{A})(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{A})h_2(\mathbf{A})(\mathbf{x})$$

On a

$$f_2(\mathbf{A})f_1(\mathbf{A})h_1(\mathbf{A})(\mathbf{x}) = h_1(\mathbf{A})(f_1 f_2)(\mathbf{A})(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

La première égalité découle du fait que les polynômes en $\mathbf{A}$ commutent entre eux, la seconde du fait que $\mathbf{x}$ est un vecteur de $\mathrm{Ker}((f_1 f_2)(\mathbf{A}))$ par hypothèse. Ainsi $f_1(\mathbf{A})h_1(\mathbf{A})(\mathbf{x})$ est un vecteur de $\mathrm{Ker}(f_2(\mathbf{A}))$. De la même façon, on montre que $f_2(\mathbf{A})h_2(\mathbf{A})(\mathbf{x})$ est un vecteur de $\mathrm{Ker}(f_1(\mathbf{A}))$.

Reste à montrer que la somme

$$\mathrm{Ker}(f_1(\mathbf{A})) + \mathrm{Ker}(f_2(\mathbf{A})) = \mathrm{Ker}((f_1 f_2)(\mathbf{A}))$$

est directe. Si $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker}(f_1(\mathbf{A})) \cap \operatorname{Ker}(f_2(\mathbf{A}))$, d'après la relation (8.4), on a

$$\mathbf{x} = f_1(\mathbf{A})h_1(\mathbf{A})(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{A})h_2(\mathbf{A})(\mathbf{x}).$$

Donc

$$\mathbf{x} = h_1(\mathbf{A})f_1(\mathbf{A})(\mathbf{x}) + h_2(\mathbf{A})f_2(\mathbf{A})(\mathbf{x})$$

soit $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Si l'on suppose de plus que le polynôme $f_1 f_2$ est annulateur de $\mathbf{A}$, on a $(f_1 f_2)(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, d'où $\operatorname{Ker}((f_1 f_2)(\mathbf{A})) = \mathbb{K}^n$. Ce qui montre la deuxième assertion :

$$\mathbb{K}^n = \operatorname{Ker}(f_1(\mathbf{A})) \oplus \operatorname{Ker}(f_2(\mathbf{A})).$$

□

8.3.2. Exemple.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ satisfaisant

$$(\mathbf{A} - \alpha \mathbf{1}_2)(\mathbf{A} - \beta \mathbf{1}_2) = \mathbf{0} \tag{8.5}$$

où α et β sont deux réels distincts. D'après la proposition précédente, on a

$$\mathbb{R}^2 = E_\alpha \oplus E_\beta,$$

où E_α et E_β sont les deux sous-espaces propres associés à la matrice $\mathbf{A}$. Un point important de la preuve de la proposition 8.3.1 est qu'elle fournit une méthode constructive pour déterminer l'expression des projections de $\mathbb{R}^2$ sur les sous-espaces propres E_α et E_β. Les polynômes $x - \alpha$ et $x - \beta$ sont premiers entre eux, il existe donc une identité de Bézout :

$$\frac{-1}{\alpha - \beta}(x - \alpha) + \frac{1}{\alpha - \beta}(x - \beta) = 1. \tag{8.6}$$

Notons

$$\Pi_1 = \frac{1}{\alpha - \beta}(\mathbf{A} - \beta \mathbf{1}_2), \qquad \Pi_2 = \frac{-1}{\alpha - \beta}(\mathbf{A} - \alpha \mathbf{1}_2)$$

Alors Π_1 représente la projection de $\mathbb{R}^2$ sur E_α et Π_2 représente la projection de $\mathbb{R}^2$ sur E_β, exprimée dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. En effet, de la relation (8.6), on déduit que

$$\Pi_1 + \Pi_2 = \mathbf{1}_2. \tag{8.7}$$

Par ailleurs, de la relation 8.5, on déduit que

$$\Pi_1 \Pi_2 = \Pi_2 \Pi_1 = \mathbf{0} \tag{8.8}$$

Des relation 8.6 et 8.7, on déduit que Π_1 et Π_2 sont des matrices de projecteurs de $\mathbb{R}^2$, *i.e.*,

$$\Pi_1^2 = \Pi_1, \quad \Pi_2^2 = \Pi_2.$$

Comme

$$\operatorname{Im}(\Pi_1) = \operatorname{Ker}(\Pi_2) \text{ et } \operatorname{Im}(\Pi_2) = \operatorname{Ker}(\Pi_1),$$

on a $\operatorname{Im}(\Pi_1) = E_\alpha$ et $\operatorname{Im}(\Pi_2) = E_\beta$. Ainsi, Π_1 et Π_2 sont les matrices des projecteurs de $\mathbb{R}^2$ sur les sous-espaces E_α et E_β respectivement.

8.3.3 Exercice.— Considérons la matrice réelle

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Montrer que $(\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_4)(\mathbf{A} - \mathbf{1}_4) = \mathbf{0}$.

2. Déterminer les sous-espaces propres ainsi que les matrices des projections de $\mathbb{R}^4$ sur ces sous-espaces propres, exprimées dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

8.3.4. Le lemme des noyaux. — La formulation générale de cette décomposition, avec un produit fini quelconque de polynômes, est appelée le *lemme des noyaux*. La preuve se déroule sur le même principe qu'en présence de deux polynômes.

8.3.5 Théorème (Lemme des noyaux). — Soient $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $f_1, \ldots, f_p$ des polynômes de $\mathbb{K}[x]$ premiers entre eux deux à deux. Alors,

$$\mathrm{Ker}\big((f_1 \ldots f_p)(\mathbf{A})\big) = \mathrm{Ker}(f_1(\mathbf{A})) \oplus \ \ldots \ \oplus \mathrm{Ker}(f_p(\mathbf{A})).$$

Si de plus, le polynôme $f_1 f_2 \ldots f_p$ est annulateur de $\mathbf{A}$, on a

$$\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker} f_1(\mathbf{A}) \oplus \ \ldots \ \oplus \mathrm{Ker} f_p(\mathbf{A}).$$

Preuve. Posons $g = f_1 \ldots f_p$ et, pour tout entier $i \in [\![1, p]\!]$, posons

$$g_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} f_j.$$

Les polynômes $f_1, \ldots, f_p$ sont premiers entre eux deux à deux, donc les polynômes $g_1, \ldots, g_p$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. D'après l'identité de Bézout, théorème 1.5.13, il existe des polynômes $h_1, \ldots, h_p$ de $\mathbb{K}[x]$ tels que :

$$g_1 h_1 + \ldots + g_p h_p = 1.$$

Par suite, on a la relation matricielle :

$$g_1(\mathbf{A}) h_1(\mathbf{A}) + \ldots + g_p(\mathbf{A}) h_p(\mathbf{A}) = \mathbf{1}_n. \tag{8.9}$$

Montrons alors que $\mathrm{Ker}(f_1(\mathbf{A})) + \ldots + \mathrm{Ker}(f_p(\mathbf{A})) = \mathrm{Ker}(g(\mathbf{A}))$.

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, les polynômes en $\mathbf{A}$ commutant entre eux, on a

$$g(\mathbf{A}) = f_1(\mathbf{A}) \ \ldots \ f_i(\mathbf{A}) \ \ldots \ f_p(\mathbf{A}) = f_1(\mathbf{A}) \ldots f_p(\mathbf{A}) f_i(\mathbf{A}).$$

Par suite, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, le noyau de $f_i(\mathbf{A})$ est contenu dans le noyau de $g(\mathbf{A})$. La somme des noyaux

$$\mathrm{Ker}(f_1(\mathbf{A})) + \ldots + \mathrm{Ker}(f_p(\mathbf{A}))$$

est ainsi contenue dans le noyau $\mathrm{Ker}(g(\mathbf{A}))$.

Inversement, si $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(g(\mathbf{A}))$, d'après la relation (8.9), on a :

$$\mathbf{x} = g_1(\mathbf{A}) h_1(\mathbf{A})(\mathbf{x}) + \ldots + g_p(\mathbf{A}) h_p(\mathbf{A})(\mathbf{x}). \tag{8.10}$$

Par ailleurs, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on a

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{A})(g_i(\mathbf{A}) h_i(\mathbf{A})(\mathbf{x})) &= g(\mathbf{A}) h_i(\mathbf{A})(\mathbf{x}) \\ &= h_i(\mathbf{A}) g(\mathbf{A})(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Donc $g_i(\mathbf{A}) h_i(\mathbf{A})(\mathbf{x}) \in \mathrm{Ker}(f_i(\mathbf{A}))$ et d'après la décomposition (8.10), on en déduit que

$$\mathbf{x} \ \in \ \mathrm{Ker}(f_1(\mathbf{A})) + \ldots + \mathrm{Ker}(f_p(\mathbf{A})).$$

Reste à montrer que la somme des noyaux $\mathrm{Ker}(f_1(\mathbf{A})) + \ldots + \mathrm{Ker}(f_p(\mathbf{A}))$ est directe. D'après 2.3.9, il suffit de montrer que pour tout $i \in [\![2,p]\!]$, l'intersection

$$\mathrm{Ker}(f_i(\mathbf{A})) \;\cap\; \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{Ker}(f_j(\mathbf{A})) \tag{8.11}$$

est le sous-espace vectoriel nul. Soit $i \in [\![2,p]\!]$ et soit $\mathbf{x}$ un vecteur de l'intersection (8.11). D'après la relation (8.9), on a $\mathbf{x} = g_1(\mathbf{A})h_1(\mathbf{A})(\mathbf{x}) + \ldots + g_p(\mathbf{A})h_p(\mathbf{A})(\mathbf{x})$, d'où

$$\mathbf{x} = g_i(\mathbf{A})h_i(\mathbf{A})(\mathbf{x}) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} g_j(\mathbf{A})h_j(\mathbf{A})(\mathbf{x}). \tag{8.12}$$

Si $j \neq i$, le polynôme f_i divise g_j, or $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(g_i(u))$ donc

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} g_j(\mathbf{A})h_j(\mathbf{A})(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} h_j(\mathbf{A})g_j(\mathbf{A})(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Par ailleurs, $\mathbf{x} \in \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{Ker}(f_j(\mathbf{A}))$, donc $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{x}_j$, où $\mathbf{x}_j \in \mathrm{Ker}(f_j(\mathbf{A}))$. Ainsi

$$g_i(\mathbf{A})h_i(\mathbf{A})(\mathbf{x}) = h_i(\mathbf{A})g_i(\mathbf{A})(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

D'après la décomposition (8.12), on en déduit que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Si le polynôme $g = f_1 f_2 \ldots f_p$ est annulateur de $\mathbf{A}$, on a

$$\mathrm{Ker}(g(\mathbf{A})) = \mathrm{Ker}(f_1(\mathbf{A})) \oplus \;\ldots\; \oplus \mathrm{Ker}(f_p(\mathbf{A})).$$

Or $g(\mathbf{A}) = 0$, donc $\mathrm{Ker}(g(\mathbf{A})) = \mathbb{K}^n$, d'où la seconde assertion du théorème. $\square$

8.3.6. Conséquence immédiate du lemme des noyaux.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est

$$p_{\mathbf{A}} = (x - \lambda_1)^{n_1} \ldots (x - \lambda_p)^{n_p},$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$. Les polynômes $(x - \lambda_i)^{n_i}$ sont premiers entre eux deux à deux, du lemme des noyaux, nous déduisons la décomposition

$$\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{1}_n)^{n_1} \oplus \;\ldots\; \oplus \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{1}_n)^{n_p}.$$

8.3.7 Exercice.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de trace nulle, admettant 1 et i comme valeurs propres.

1. Déterminer toutes les autres valeurs propres de $\mathbf{A}$.

2. Montrer que
$$\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^2 - \mathbf{1}_n) \oplus \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^2 + \mathbf{1}_n).$$

§ 4 Le polynôme minimal

8.4.1. Une autre caractérisation des matrices diagonalisables.— La principale conséquence du lemme des noyaux, théorème 8.3.5, que nous énoncerons ici est une nouvelle caractérisation de la diagonalisation des matrices.

8.4.2 Théorème.— Une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, il existe un polynôme de $\mathbb{K}[x]$ annulateur de $\mathbf{A}$ scindé et ne possédant que des racines simples.

Preuve. Montrons que la condition est suffisante. Soit g un polynôme de $\mathbb{K}[x]$ annulateur de $\mathbf{A}$ qui soit scindé sur $\mathbb{K}$ et avec toutes ses racines simples. Alors, le polynôme g s'écrit sous la forme

$$g = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_p),$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$. Comme par hypothèse $g(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ et que les facteurs dans la décomposition du polynôme g sont premiers entre eux deux à deux, d'après le lemme des noyaux, théorème 8.3.5, on a :

$$\mathbb{K}^n = \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{1}_n) \oplus \ \dots \ \oplus \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{1}_n).$$

Le sous-espace $\operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)$ étant le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i, l'espace $\mathbb{K}^n$ se décompose en une somme directe de sous-espaces propres. Du théorème 7.4.1, on en déduit que la matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable.

Montrons que la condition est nécessaire. Supposons que la matrice $\mathbf{A}$ soit diagonalisable. Il existe alors une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de $\mathbf{A}$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de $\mathbf{A}$ et soient $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ les sous-espaces propres associés.

Le polynôme $g = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_p)$ de $\mathbb{K}[x]$ est scindé et toutes ses racines sont simples. Pour tout vecteur $\mathbf{e}$ de la base $\mathcal{B}$, il existe au moins une valeur propre λ_i telle que $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}_n)\mathbf{e} = \mathbf{0}$. Par suite

$$g(\mathbf{A})(\mathbf{e}) = (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{1}_n) \dots (\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{1}_n)\mathbf{e} = \mathbf{0}.$$

On a $g(\mathbf{A})\mathbf{e} = \mathbf{0}$ pour tout vecteur $\mathbf{e}$ de la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$, par suite $g(\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pour tout vecteur de $\mathbb{K}^n$. Il s'ensuit que $g(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. $\square$

8.4.3 Exercice.— Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les matrices réelles suivantes soient diagonalisables :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}.$$

8.4.4. Le polynôme minimal.— D'après le théorème 8.4.2, une matrice est diagonalisable si, et seulement si, elle possède un polynôme annulateur scindé dont toutes les racines sont simples. Il s'agit d'une caractérisation de nature algébrique, dans le sens où elle ne porte que sur les coefficients de la matrice. On comprend alors l'intérêt de caractériser l'ensemble des polynômes annulateurs d'une matrice. Nous abordons maintenant une méthode permettant de déterminer tous les polynômes annulateurs d'une matrice.

8.4.5. Définition.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *polynôme minimal* de $\mathbf{A}$ et on note $m_{\mathbf{A}}$, le polynôme unitaire annulateur de $\mathbf{A}$ de plus petit degré.

8.4.6 Proposition.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme minimal $m_{\mathbf{A}}$ est unique et divise tout polynôme annulateur de $\mathbf{A}$.

Preuve. Montrons que $m_{\mathbf{A}}$ divise tout polynôme annulateur de $\mathbf{A}$. Soit g un polynôme annulateur de $\mathbf{A}$. En effectuant la division euclidienne de g par $m_{\mathbf{A}}$, théorème **??**, il existe deux polynômes :

$$g = g'\, m_{\mathbf{A}} + r,$$

avec $\deg r < \deg m_{\mathbf{A}}$. La matrice $\mathbf{A}$ étant racine du polynôme g et de son polynôme minimal $m_{\mathbf{A}}$, on a

$$\mathbf{0} = g(\mathbf{A}) = g'(\mathbf{A})\, m_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A}).$$

D'où $\mathbf{A}$ est racine du polynôme r. Or, par définition, $m_{\mathbf{A}}$ est le polynôme annulateur de $\mathbf{A}$ de plus petit degré, par suite le polynôme r ne peut pas être nul, car sinon on aurait R annulateur de $\mathbf{A}$ et $\deg r < \deg m_{\mathbf{A}}$. Ainsi, le polynôme reste r est nul, et par conséquent le polynôme $m_{\mathbf{A}}$ divise g.

Montrons l'unicité du polynôme minimal $m_{\mathbf{A}}$. Supposons que la matrice $\mathbf{A}$ admette deux polynômes minimaux m et m'. Ils sont tous deux annulateurs de $\mathbf{A}$, donc m divise m' et m' divise m. Par suite, il existe un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $m = \alpha m'$. Les polynômes m et m' étant unitaires, on en déduit que $m = m'$. Ce qui montre l'unicité. □

L'ensemble des polynômes annulateur d'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est ainsi déterminé par son polynôme minimal $m_{\mathbf{A}}$. En effet, tout polynôme annulateur g de $\mathbf{A}$ s'écrit :

$$g = g'\, m_{\mathbf{A}},$$

où g' est un polynôme de $\mathbb{K}[x]$. Autrement dit, l'ensemble des polynômes annulateurs de $\mathbf{A}$ s'écrit $m_{\mathbf{A}} \cdot \mathbb{K}[x]$. Nous pouvons alors reformuler le théorème 8.4.2 de caractérisation algébrique des matrices diagonalisables de la façon suivante.

8.4.7 Théorème.— Une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, son polynôme minimal $m_{\mathbf{A}}$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et possède toutes ses racines simples.

Preuve. D'après le théorème 8.4.2, la condition est suffisante. Supposons que $\mathbf{A}$ soit diagonalisable, d'après le théorème 8.4.2, il admet un polynôme annulateur g scindé à racines simples. Or d'après la proposition 8.4.6 le polynôme $m_{\mathbf{A}}$ divise g, donc $m_{\mathbf{A}}$ est scindé. □

8.4.8. Exemple : matrices nilpotentes.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice nilpotente, il existe un entier q tel que $\mathbf{A}^q = 0$. Le polynôme x^q est alors annulateur de $\mathbf{A}$ et le polynôme minimal de $\mathbf{A}$ est de la forme x^k avec $1 \leq k \leq q$. D'après le théorème 8.4.7, une matrice nilpotente est donc diagonalisable si, et seulement si, elle est nulle.

8.4.9 Exercice.— Montrer qu'une matrice triangulaire n'ayant que des 0 sur la diagonale est diagonalisable si, et seulement si, elle est nulle.

FIGURE 8.1 – William Rowan Hamilton (1805 - 1865)

Sir William Rowan Hamilton est un mathématicien, astronome et physicien irlandais. Il contribua au développement de l'optique et de la dynamique, en mathématiques ses travaux portent sur l'algèbre, sa contribution majeure reste la découverte des quaternions. Il découvrent ces nombres en 1843 en essayant d'étendre les nombres complexes à des espaces de dimension supérieure à 2*. L'objectif était de construire des nombres dans l'espace qui ont des propriétés analogues à celles des nombres complexes dans le plan. Hamilton aurait découvert la structure multiplicative des quaternions, en se promenant avec son épouse le long du Royal Canal à Dublin. Une plaque sur le pont indique ≪ Ici, le 16 octobre 1843, alors qu'il se promenait, Sir William Rowan Hamilton découvrit dans un éclair de génie la formule fondamentale sur la multiplication des quaternions* $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ *et la grava sur une pierre du pont. ≫*

FIGURE 8.2 – Broom Bridge sur le Royal Canal à Dublin

Le **théorème de Cayley-Hamilton** *: toute matrice est racine de son polynôme caractéristique a été montré par Hamilton en 1853 pour la matrice d'une rotation de l'espace de dimension* 3*. Cayley formule le théorème pour toutes les matrices carrées d'ordre* 3 *en 1958. Cependant, ni Hamilton, ni Cayley ne publieront de preuve de ce résultat. Il faudra attendre 1878 pour une première preuve par Ferdinand Georg Frobenius. Nous connaissons aujourd'hui un nombre important de preuves différentes de ce résultat.*

§ 5 Le théorème de Cayley-Hamilton

Le résultat suivant montre que le polynôme caractéristique d'une matrice est annulateur d'une matrice. Ainsi, du polynôme caractéristique on pourra déduire le polynôme minimal.

8.5.1 Théorème (Théorème de Cayley-Hamilton). — Toute matrice est racine de son polynôme caractéristique.

Preuve. Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrons que $\mathbf{A}$ est racine de son polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}}$. Le polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}}$ est scindé sur $\mathbb{C}$:

$$p_{\mathbf{A}} = (x-\lambda_1)^{n_1}\dots(x-\lambda_p)^{n_p}. \tag{8.13}$$

La matrice $\mathbf{A}$ est donc trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: il existe une matrice inversible $\mathbf{P}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P},$$

où $\mathbf{T}$ est une matrice triangulaire de la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \mathbf{T}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{T}_p \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \text{avec} \quad \mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C})$$

La matrice $\mathbf{T}_i - \lambda_i \mathbf{1}_{n_i}$ est nilpotente d'indice de nilpotence n_i, soit

$$(\mathbf{T}_i - \lambda_i \mathbf{1}_{n_i})^{n_i} = \mathbf{0}.$$

Par suite,

$$(\mathbf{T} - \lambda_i \mathbf{1}_n)^{n_i} = \begin{bmatrix} (\mathbf{T}_1 - \lambda_i \mathbf{1}_{n_1})^{n_i} & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & (\mathbf{T}_i - \lambda_i \mathbf{1}_{n_i})^{n_i} & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & (\mathbf{T}_p - \lambda_i \mathbf{1}_{n_p})^{n_i} \end{bmatrix}$$

Donc

$$(\mathbf{T} - \lambda_i \mathbf{1}_n)^{n_i} = \begin{bmatrix} (\mathbf{T}_1 - \lambda_i \mathbf{1}_{n_1})^{n_i} & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \boxed{\mathbf{0}} & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & (\mathbf{T}_p - \lambda_i \mathbf{1}_{n_p})^{n_i} \end{bmatrix}$$

Le i-ième bloc $\boxed{\mathbf{0}}$ est nul, par conséquent, on a

$$(\mathbf{T} - \lambda_1 \mathbf{1}_n)^{n_1}(\mathbf{T} - \lambda_2 \mathbf{1}_n)^{n_2}\dots(\mathbf{T} - \lambda_p \mathbf{1}_n)^{n_p} = \mathbf{0}.$$

30. The equation satisfied by the matrix may be of the form $M^n = 1$; the matrix is in this case said to be periodic of the nth order. The preceding considerations apply to the theory of periodic matrices; thus, for instance, suppose it is required to find a matrix of the order 2, which is periodic of the second order. Writing

$$M = \left(\begin{array}{cc} a, & b \\ c, & d \end{array}\right),$$

we have

$$M^2 - (a+d)M + ad - bc = 0,$$

and the assumed equation is

$$M^2 - 1 = 0.$$

These equations will be identical if

$$a + d = 0,\quad ad - bc = -1,$$

that is, these conditions being satisfied, the equation $M^2 - 1 = 0$ required to be satisfied, will be identical with the equation which is always satisfied, and will therefore itself be satisfied. And in like manner the matrix M of the order 2 will satisfy the condition $M^3 - 1 = 0$, or will be periodic of the third order, if only $M^3 - 1$ contains as a factor

$$M^2 - (a+d)M + ad - bc,$$

and so on.

31. But suppose it is required to find a matrix of the order 3,

$$M = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ d, & e, & f \\ g, & h, & i \end{array}\right)$$

which shall be periodic of the second order. Writing for shortness

$$\left|\begin{array}{ccc} a-M, & b & , c \\ d & , e-M, & f \\ g & , h & , i-M \end{array}\right| = -(M^3 - AM^2 + BM - C),$$

the matrix here satisfies

$$M^3 - AM^2 + BM - C = 0,$$

FIGURE 8.3 – Formulation du théorème de Cayley-Hamilton par Cayley en 1858.

Par ailleurs, vu l'expression (8.13) du polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$, on a

$$p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{1}_n)^{n_1} \dots (\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{1}_n)^{n_p}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1} p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})\mathbf{P} &= \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{1}_n)^{n_1} \dots (\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{1}_n)^{n_p}\mathbf{P} \\ &= (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} - \lambda_1 \mathbf{1}_n)^{n_1} \dots (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} - \lambda_p \mathbf{1}_n)^{n_p} \\ &= (\mathbf{T} - \lambda_1 \mathbf{1}_n)^{n_1}(\mathbf{T} - \lambda_2 \mathbf{1}_n)^{n_2} \dots (\mathbf{t} - \lambda_p \mathbf{1}_n)^{n_p} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Ainsi $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. $\square$

8.5.2. Calcul du polynôme minimal. — Une méthode permettant de déterminer le polynôme minimal d'une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, consiste à considérer un polynôme annulateur de $\mathbf{A}$ et à chercher dans l'ensemble de ses diviseurs, le polynôme unitaire annulateur de plus petit degré. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, théorème 8.5.1, un candidat naturel pour le polynôme annulateur est le polynôme caractéristique. Nous allons voir comment mettre en oeuvre cette méthode dans ce cas.

Montrons dans un premier temps que le spectre d'une matrice coïncide avec les racines de son polynôme minimal.

8.5.3 Proposition.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Un scalaire λ est valeur propre de $\mathbf{A}$ si, et seulement si, il est racine du polynôme minimal $m_{\mathbf{A}}$.

Preuve. Le polynôme $p_{\mathbf{A}}$ est annulateur de $\mathbf{A}$, il admet donc le polynôme $m_{\mathbf{A}}$ comme diviseur. Il existe un polynôme g de $\mathbb{K}[x]$ tel que $p_{\mathbf{A}} = g\, m_{\mathbf{A}}$. Par suite, toute racine du polynôme $m_{\mathbf{A}}$ est racine de $p_{\mathbf{A}}$, donc est valeur propre de $\mathbf{A}$.

Inversement, le polynôme $m_{\mathbf{A}}$ est annulateur de $\mathbf{A}$, donc, d'après la proposition 8.2.9, toute valeur propre de $\mathbf{A}$ est racine de $m_{\mathbf{A}}$. $\square$

De ce résultat on déduit

8.5.4 Proposition.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme $p_{\mathbf{A}}$ est scindé :

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n (x-\lambda_1)^{n_1} \ldots (x-\lambda_p)^{n_p},$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$, pour tout $i \neq j$ et $n_1 + \ldots + n_p = n$, alors

$$m_{\mathbf{A}} = (x-\lambda_1)^{k_1} \ldots (x-\lambda_p)^{k_p},$$

avec $1 \leq k_i \leq n_i$.

Preuve. D'après le théorème 8.5.1, le polynôme $m_{\mathbf{A}}$ divise le polynôme $p_{\mathbf{A}}$ et, d'après la proposition 8.5.3, les polynômes $m_{\mathbf{A}}$ et $p_{\mathbf{A}}$ possèdent les mêmes racines. $\square$

8.5.5. Exemple.— On considère la matrice suivante de de $\mathcal{M}_8(\mathbb{R})$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est

$$p_{\mathbf{A}} = (x-3)^4 (x-5)^3 (x-7).$$

La matrice $\mathbf{A}$ est diagonale par blocs :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix},$$

avec

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}.$$

On note que $(\mathbf{B} - 3\mathbf{1}_4)^3 = \mathbf{0}$, $(\mathbf{C} - 5\mathbf{1}_3)^2 = \mathbf{0}$ et $\mathbf{D} - 7\mathbf{1}_1 = \mathbf{0}$. On obtient alors,

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{A} - 3\mathbf{1}_8)^3(\mathbf{A} - 5\mathbf{1}_8)^2(\mathbf{A} - 7\mathbf{1}_8) \\
&= \begin{bmatrix} (\mathbf{B} - 3\mathbf{1}_4)^3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{C} - 3\mathbf{1}_3)^3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{D} - 3\mathbf{1}_1)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{B} - 5\mathbf{1}_4)^2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{C} - 5\mathbf{1}_3)^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{D} - 5\mathbf{1}_1)^2 \end{bmatrix} (\mathbf{A} - 7\mathbf{1}_8) \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{C} - 3\mathbf{1}_3)^3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{D} - 3\mathbf{1}_1)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{B} - 5\mathbf{1}_4)^2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{D} - 5\mathbf{1}_1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} - 7\mathbf{1}_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} - 7\mathbf{1}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{D} - 5\mathbf{1}_1)^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} - 7\mathbf{1}_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} - 7\mathbf{1}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Or 3, 2 et 1 sont les indices de nilpotence des matrices $\mathbf{A} - 3\mathbf{1}_8$, $\mathbf{A} - 5\mathbf{1}_8$ et $\mathbf{A} - 7\mathbf{1}_8$ respectivement. Par suite le polynôme minimal de $\mathbf{A}$ est

$$m_{\mathbf{A}} = (x-3)^3(x-5)^3(x-7).$$

8.5.6. Exemple.— Le polynôme minimal de la rotation d'angle θ du plan vectoriel, représentée dans la base canonique par la matrice

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

est $p_{\mathbf{R}_\theta} = x^2 - 2\cos\theta x + 1$.

8.5.7. Exemples.— Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Alors $p_{\mathbf{A}} = -(x-1)(x+2)^2$. Les deux valeurs possibles pour le polynôme minimal de $\mathbf{A}$ sont donc soit $(x-1)(x+2)^2$, soit $(x-1)(x+2)$. Or

$$(\mathbf{A} - \mathbf{1}_3)(\mathbf{A} + 2\mathbf{1}_3) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Par suite $m_{\mathbf{A}} = (x-1)(x+2)$ est le polynôme minimal. On en déduit que la matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \{1, -2\}$, où -2 est valeur propre double.

Soit

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a $p_{\mathbf{B}} = -(x-1)^3$. Donc $m_{\mathbf{B}} = (x-1)^k$, où $k = 1, 2$ ou 3. Par ailleurs, $\mathbf{B}$ est diagonalisable si, et seulement si, $m_{\mathbf{B}} = x - 1$. Or $m_{\mathbf{B}}(\mathbf{B}) = \mathbf{B} - \mathbf{1}_3 \neq \mathbf{0}$, donc $\mathbf{B}$ n'est pas diagonalisable.

8.5.8 Exercice. — Construire deux matrices qui ont même polynôme caractéristique et même polynôme minimal et qui ne sont pas semblables.

8.5.9. Exemple : calcul de l'inverse d'une matrice admettant deux valeurs propres. — Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que son polynôme minimal est scindé, de degré 2 :

$$m_{\mathbf{A}} = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2).$$

On suppose de plus que les deux valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont non nulles. On peut alors en déduire les puissances de $\mathbf{A}$ et son inverse. La matrice $\mathbf{A}$ est inversible, car λ_1 et λ_2 sont non nuls. On a

$$m_{\mathbf{A}} = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) = x(x - (\lambda_1 + \lambda_2)) + \lambda_1\lambda_2.$$

Par suite, la matrice $\mathbf{A}$ vérifie

$$\mathbf{A}(\mathbf{A} - (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{1}_n) = -\lambda_1\lambda_2\mathbf{1}_n.$$

On en déduit l'inverse de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}(\mathbf{A} - (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{1}_n). \tag{8.14}$$

Par exemple, dans l'exemple 7.1.14, nous avons montré que la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{bmatrix},$$

est diagonalisable et qu'elle possède deux valeurs propres distinctes $n-1$ et $2n-1$ (on suppose que $n > 1$). Son polynôme minimal est donc $m_{\mathbf{A}} = (x - (n-1))(x - (2n-1))$. D'après ce qui précéde, on en déduit que

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{(1-n)(2n-1)}(\mathbf{A} - (3n-2)\mathbf{1}_n).$$

Soit

$$\mathbf{A} = \frac{1}{(1-n)(2n-1)} \begin{bmatrix} 2(1-n) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2(1-n) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2(1-n) \end{bmatrix}.$$

8.5.10 Exercice. — Utiliser la formule (8.14) pour calculer l'inverse de la matrice $\mathbf{R}_\theta$ de l'exemple 6.3.6.

8.5.11. Exemple. — Plus généralement, on peut utiliser le théorème de Cayley-Hamilton pour calculer l'inverse d'une matrice. Soit $\mathbf{A}$ une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Son polynôme caractéristique est de degré n, il s'écrit sous la forme

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\mathbf{A}$ est racine de $p_{\mathbf{A}}$ et on a :

$$(-1)^n \mathbf{A}^n + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbf{1}_n = \mathbf{0}.$$

D'où

$$\mathbf{A}\left[(-1)^n\mathbf{A}^{n-1} + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-2} + \ldots + a_1\mathbf{1}_n\right] = -a_0\mathbf{1}_n.$$

Le coefficient a_0 est non nul, car $a_0 = p_{\mathbf{A}}(0) = \det \mathbf{A}$ et $\mathbf{A}$ est inversible. Ainsi,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{-1}{a_0}\left[(-1)^n\mathbf{A}^{n-1} + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-2} + \ldots + a_1\mathbf{1}_n\right].$$

§ 6 Exercices

8.6.1 Exercice. — Déterminer le polynôme minimal des matrices réelles suivantes, où a, b et c sont trois réels distincts deux à deux :

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_7 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}.$$

8.6.2 Exercice. — Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_9 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.6.3 Exercice.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Sans utiliser le polynôme minimal, montrer que le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n x^n.$$

2. Comment déterminer le polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}}$ en utilisant le polynôme minimal ?
3. Par récurrence, montrer que $\mathbf{A}$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.
4. Inversement, montrer que toute matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec des 0 sur la diagonale est nilpotente d'indice de nilpotence $p \leq n$.

8.6.4 Exercice.— Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b, c, d, e, f pour que les matrices suivantes soient diagonalisables dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.6.5 Exercice.— Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels a et b pour que la matrice suivante soit diagonalisables dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -a & -a & 1 \\ 1-b & a & a-1 & -b \\ b & -a & 1-a & 1+b \\ 0 & a & a & 0 \end{bmatrix}.$$

8.6.6 Exercice.— Soit $\mathbf{J}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

1. Calculer $\mathbf{J}^p$ pour tout entier $p \in [\![1, n]\!]$.
2. En déduire que $\mathbf{J}$ est diagonalisable.
3. Montrer que les matrices $\mathbf{1}_n, \mathbf{J}, \dots, \mathbf{J}^{n-1}$ sont linéairement indépendantes.
4. Déterminer le polynôme minimal de $\mathbf{J}$.
5. Calculer les valeurs propres de $\mathbf{J}$.
6. Diagonaliser $\mathbf{J}$ en exhibant une matrice de passage.

8.6.7 Exercice.— Soit $\mathbf{A}$ la *matrice circulante* complexe suivante :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \dots & a_n & a_1 \end{bmatrix}$$

1. Exprimer $\mathbf{A}$ comme un polynôme en la matrice $\mathbf{J}$, définie dans l'exercice 8.6.6

2. Montrer que pour tout polynôme g de $\mathbb{C}[x]$, $g(\mathbf{J})$ est diagonalisable et que

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{g}(\mathbf{J})) = \{g(\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathbf{J})\}.$$

3. En déduire que la matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable et calculer ses valeurs propres.
4. Calculer le déterminant de $\mathbf{A}$.

8.6.8 Exercice.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que 0 ne peut pas être valeur propre de $\mathbf{A}$.
2. En déduire que $\mathbf{A}^{-1}$ est un polynôme en $\mathbf{A}$. [On pourra utiliser le fait que le polynôme x ne divise pas le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$.]

8.6.9 Exercice.— Soient $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et p un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Montrer que si le polynôme p est premier avec le polynôme minimal $m_{\mathbf{A}}$ de $\mathbf{A}$, alors la matrice $p(\mathbf{A})$ est inversible.
2. Inversement, montrer que si la matrice $p(\mathbf{A})$ est inversible, alors les polynômes p et $m_{\mathbf{A}}$ sont premiers entre eux.

8.6.10 Exercice.— Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $\mathbf{X}^3 = \mathbf{X}$.

8.6.11 Exercice.— L'objectif est de résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation

$$\mathbf{X}^3 + \mathbf{X} = \mathbf{0}.$$

Soit $\mathbf{A}$ une matrice non nulle solution de l'équation précédente.

1. Montrer que

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(\mathbf{A}) \oplus \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^2 + \mathbf{1}_3).$$

2. Déterminer le polynôme minimal de $\mathbf{A}$.
3. Montrer que si $\mathbf{x}$ n'appartient pas à $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$, alors $(\mathbf{x}, \mathbf{Ax})$ est libre.
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ est de dimension 1. En déduire que $\mathbf{A}$ est semblable à la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

8.6.12 Exercice.— Soit p un polynôme de $\mathbb{K}[x]$ défini par

$$p = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_1x - a_0.$$

On appelle *matrice compagnon* du polynôme p la matrice suivante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{A}$ est $p_{\mathbf{A}} = (-1)^n p$.
2. Sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, montrer que le polynôme p est annulateur de la matrice $\mathbf{A}$.
3. En déduire que p est le polynôme minimal de la matrice $\mathbf{A}$.

8.6.13 Exercice.— 1. En utilisant l'exercice 8.6.12, construire une matrice ayant pour polynôme caractéristique

$$p = (x^3 - 1)(x^2 + x + 1).$$

2. Cette matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$?

3. Construire une matrice compagnon de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonalisable et une matrice compagnon de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonalisable.

8.6.14 Exercice.— Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. On considère le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ formé des endomorphismes de E. Pour tout endomorphisme u de E, on définit l'application

$$\begin{aligned} D_u : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ v &\longmapsto u \circ v. \end{aligned}$$

1. Montrer que D_u est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n et tout endomorphisme $v \in \mathcal{L}(E)$, on a

$$(D_u)^n(v) = u^n \circ v.$$

En déduire que, pour tout polynôme f de $\mathbb{K}[x]$, on a

$$f(D_u) = D_{f(u)}.$$

3. Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, D_u est diagonalisable.

4. Soient $(\mathbf{e}_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E et u un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $(\mathbf{e}_i)_{1\leq i\leq n}$ est notée M. Soit $(\mathbf{e}_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une base de $\mathcal{L}(E)$ définie par

$$\mathbf{e}_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k}\mathbf{e}_i,$$

où $\delta_{j,k} = 1$ si $j = k$ et $\delta_{j,k} = 0$ si $j \neq k$. Montrer que la matrice de D_u dans la base

$$(\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{n,1}, \mathbf{e}_{1,2}, \ldots, \mathbf{e}_{n,2}, \ldots, \mathbf{e}_{1,n}, \ldots, \mathbf{e}_{n,n}),$$

s'écrit

$$\begin{bmatrix} \mathrm{M} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{M} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathrm{M} \end{bmatrix}.$$

8.6.15 Exercice.— Dans la suite, on suppose que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. On considère la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}(E)$, formée des endomorphismes représentés dans la base canonique par les matrices E_i suivantes :

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soit u l'endomorphisme de E représenté dans la base canonique par la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que u est diagonalisable.

2. Écrire la matrice de D_u dans la base $\mathcal{B}$.
3. Diagonaliser D_u.

8.6.16 Exercice.— On considère la matrice réelle suivante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a^2 & a^2 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & a^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$.
2. Pour quelles valeurs de a, la matrice $\mathbf{A}$ est-elle diagonalisable ?
3. Diagonaliser $\mathbf{A}$ en donnant une matrice de passage.

8.6.17 Exercice.— Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que si 0 n'est pas valeur propre de $\mathbf{A}$, la matrice $\mathbf{A}$ est inversible.
2. En utilisant le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$, exprimer l'inverse de la matrice $\mathbf{A}$ comme un polynôme en $\mathbf{A}$.
3. Écrire une procédure qui prend en argument une matrice inversible et retourne son inverse en utilisant l'expression précédente.
4. Calculer l'inverse de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

8.6.18 Exercice.— On souhaite écrire une procédure permettant de calculer le polynôme minimal d'une matrice. Nous savons que toute matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet un polynôme minimal. En effet, la famille

$$(\mathbf{1}_n, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^{n^2}),$$

composée de $n^2 + 1$ vecteurs est liée. Il existe donc des scalaires non tous nuls, tels que

$$a_0\mathbf{1}_n + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 + \ldots + a_{n^2}\mathbf{A}^{n^2} = 0$$

et le polynôme non nul $g = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n^2} x^{n^2}$ est ainsi annulateur de la matrice $\mathbf{A}$. Afin d'écrire une procédure permettant de déterminer le polynôme minimal de $\mathbf{A}$, on observe que la première famille de la suite de familles

$$(\mathbf{A}^0, \mathbf{A}^1, \ldots, \mathbf{A}^k), \qquad k \in \{0, \ldots, n^2\},$$

est libre, car elle est réduite à la matrice identité, et que la dernière de ces familles est liée. Il existe donc un plus petit indice k_0, tel que la famille $(\mathbf{A}^i)_{0 \leq i \leq k_0}$ soit liée. Par définition de k_0, la famille $(\mathbf{A}^0, \mathbf{A}^1, \ldots, \mathbf{A}^{k_0-1})$ est alors libre. Il existe donc une unique famille $(b_0, b_1, \ldots b_{k_0-1})$ de scalaires tels que

$$b_0\mathbf{1}_n + b_1\mathbf{A} + b_2\mathbf{A}^2 + \ldots + b_{k_0-1}\mathbf{A}^{k_0-1} + \mathbf{A}^{k_0} = 0.$$

Une méthode pour déterminer le polynôme minimal de la matrice $\mathbf{A}$, consiste donc à résoudre successivement le système de n^2 équations en les scalaires $b_0, b_1, \ldots b_{k-1}$:

$$b_0\mathbf{1}_n + b_1\mathbf{A} + b_2\mathbf{A}^2 + \ldots + b_{k-1}\mathbf{A}^{k-1} + \mathbf{A}^k = 0. \qquad (\mathcal{S}_k)$$

1. Montrer que le premier indice k, pour lequel le système $(\mathcal{S}_k)$ admet une solution est k_0 et que cette solution est unique.
2. Déduire de ce qui précède, une procédure qui prend en argument une matrice et retourne son polynôme minimal.