VI Congruences

VI.1 Les matrices symétriques réelles

VI.1.1 Théorème de Sylvester

Théorème. Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p+q \leqslant n$ et une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP = \left(\begin{array}{c|c|c} I_p & & \\ \hline 0 & -I_q & \\ \hline & & 0 \end{array}\right)$. De plus

$$p = \max_{\substack{F \leqslant \mathbb{R}^n \\ \forall 0 \neq x \in F,\ {}^txAx > 0}} \{\dim F\},\ q = \max_{\substack{F \leqslant \mathbb{R}^n \\ \forall 0 \neq x \in F,\ {}^txAx < 0}} \{\dim F\},\ p+q = \mathrm{rg} A \ .$$

VI.1.2 Pseudo-réduction simultanée des matrices symétriques

Théorème. Soient $A, B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Si A est *définie positive*, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que

$${}^tPAP = I_n,\ {}^tPBP = D \ .$$

Démo. Soit Q telle que ${}^tQAQ = I_n$. La matrice ${}^tQBQ$ est encore symétrique. Donc il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tO{}^tQBQO$ est diagonale. La matrice $P = QO$ convient.

Exemple. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les racines de $\text{dét}(B - \lambda A) = 0$. Soit $(v_1, ..., v_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ orthonormée pour $(x,y)_A := {}^txAy$ telle que ${}^\forall i$, $Bv_i = \lambda_i A v_i$. Alors $P = (v_1|...|v_n)$ convient.

Exercice. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, trouver P, D.

Réponse. $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$ *conviennent.*

VI.2 Les matrices symétriques complexes

Théorème. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^tA = A$. Alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$${}^tPAP = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

de plus, $r = \mathrm{rang} A$.

Démo. Exercice.

VI.3 Les matrices antisymétriques

VI.3.1 le rang

Soit $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p premier.

Théorème. Soit $A \in \mathscr{A}_n(K)$. Alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ telle que

$$
{}^tPAP = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & \cdots & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} & \\ \hline & 0 \end{array}\right)
$$

avec r blocs $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ où $2r = \mathrm{rg}A$.

Démo. Si $n = 2$. On a

$$
\forall m \neq 0,\ \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m \\ -m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .
$$

Exemple. ${}^tP \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right) P = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & \cdots & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

où $P = (\delta_{i,2j-1} + \delta_{i,2(j-n)})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2n} \in O_{2n}(\mathbb{R})$.

VI.3.2 Pfaffien

Définition. Soit $A \in \mathscr{A}_{2n}(K)$ une matrice antisymétrique. Si A est inversible, il existe $P \in \mathrm{GL}_{2n}(K)$ telle que

$$
{}^tPAP = J := \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right)
$$

et on pose $Pf(A) = \mathrm{dét}(P^{-1})$. Sinon, on pose $Pf(A) = 0$.

Proposition. *C'est bien défini !*

Démo. Nous le montrerons dans le cas réel seulement. Voir plus loin.

Exercices.

1) $(Pf\,A)^2 = \mathrm{dét}A$.

2) $\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{23}a_{34}.$

Indication. Si $a_{12} \neq 0$, *soit* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a_{23}}{a_{12}} & \frac{a_{24}}{a_{12}} \\ 0 & 1 & -\frac{a_{13}}{a_{12}} & -\frac{a_{14}}{a_{12}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) $\forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ \forall A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}),\ Pf({}^tPAP) = \mathrm{d\acute{e}t} P\, Pf\, A.$