IV Matrices orthogonales

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Définition. Sont équivalentes.

i) $^\forall x \in E$, $||f(x)|| = ||x||$.

ii) f envoie toute base orthonormale sur une base orthonormale.

iii) f envoie une base orthonormale sur une base orthonormale.

On dit que f est *une transformation orthogonale* si une de ces assertions est vraie.

Notation. $O(E)$ = l'ensemble des transformations orthogonales de E.

Exercices.

1) $O(E) \leqslant \mathrm{GL}(E)$ est un sous-groupe.

2) Si $f \in \mathscr{L}(E)$, alors $f \in O(E) \Leftrightarrow [f]_{\mathscr{B}} \in O_n(\mathbb{R})$ pour toute base orthonormale $\mathscr{B}$ de E.

Définition. Soit $M \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$. Sont équivalentes

i) ${}^tMM = I_n$ *« colonnes orthogonales »*.

ii) $M{}^tM = I_n$ *« lignes orthogonales »*.

iii) M inversible et $M^{-1} = {}^tM$.

Si une de ces conditions est vérifiée, on dit que la matrice M est *orthogonale.*

Remarques. i) $\Leftrightarrow$ « les colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ »

ii) $\Leftrightarrow$ « les lignes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ »

Une *matrice de rotation* est une matrice orthogonale de déterminant 1.

Notations. $O_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Exercices.

1) $^\forall M = -{}^tM \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $(I - M)(I + M)^{-1} \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

2) $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \leqslant O_n(\mathbb{R}) \leqslant \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

3) Si $M \in O_n(\mathbb{R})$, $\text{dét}M = \pm 1$.

Exemples. Les matrices de permutations, $I_n - 2v{}^tv$ pour tout vecteur colonne v de norme 1 pour le produit scalaire usuel, $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \phi & \frac{1}{\phi} \\ -\phi & \frac{1}{\phi} & 1 \\ \frac{1}{\phi} & -1 & \phi \end{pmatrix}$ où $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

IV.1 Symétries orthogonales

Définition. Soit $F \leqslant E$. La *symétrie orthogonale* par rapport à F est l'application linéaire $s_F : E \to E$, ${}^\forall x \in F$, ${}^\forall y \in F^\perp$, $x + y \mapsto x - y$.

Si F est de codimension 1, on dit que c'est une *réflexion orthogonale*. C'-à-d : ${}^\forall x \in F$, $s_F(x) = x$, ${}^\forall y \in F^\perp$, $s_F(y) = -y$.

Exercices.

1) Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. Alors s est une symétrie orthogonale $\Leftrightarrow$ $s = \mathrm{Id}_E$ et $\ker(s - 1) \perp \ker(s + 1)$.
2) Soit $F \leqslant E$. On a $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E - 2p_{F^\perp}$.
3) Soit $v \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne de norme 1 (pour le produit scalaire usuel. Montrer que $I_n - 2v^t v$ est une réflexion orthogonale. *Par rapport à quel sous-espace ?*
4) Soit $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que S est une matrice de symétrie orthogonale (pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$) $\Leftrightarrow$ $S^2 = I_n$ et ${}^tS = S$.

Proposition. Une matrice de symétrie orthogonale est orthogonale. De plus, les réflexions orthogonales engendrent $O_n(\mathbb{R})$.

IV.2 Dimension 2

Proposition. $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\}$, $O_2(\mathbb{R}) \backslash \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Remarques. R_α est la rotation d'angle α, S_α est la symétrie orthogonale par rapport à la droite « qui fait un angle $\frac{\alpha}{2}$ avec l'axe des abscisses ».

Exercices.

1) ${}^\forall \alpha, \beta$, $S_\alpha^2 = I_2$, $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$, $S_\alpha S_\beta = R_{\alpha-\beta}$, $S_\alpha R_\beta = S_{\alpha-\beta}$, $R_\alpha S_\beta = S_{\alpha+\beta}$.
2) $R_\alpha = \exp\alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

IV.3 Dimension 3

IV.3.1 Produit vectoriel

Définitions. (*Produit vectoriel et produit mixte*)

1) $^\forall x, y, z, x', y', z' \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

2) $^\forall x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'' \in \mathbb{R}$, $\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \right] := \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} \in \mathbb{R}$.

Propriétés.

i) $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire alternée.

ii) $^\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3$, $[u, v, w] = (u \wedge v) \cdot w$ †

iii) $^\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3$, $u \wedge (v \wedge w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$.

iv) $^\forall u, v \in \mathbb{R}^3$, $||u \wedge v||^2 = ||u||^2||v||^2 \sin^2 \alpha$ où $\alpha \in [0, \pi]$, $(u \cdot v) = ||u||||v|| \cos \alpha$.

v) (Jacobi) $^\forall u, v, w$, $u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u) + w \wedge (u \wedge v) = 0$.

Remarque. $\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y} \perp \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$.

IV.3.2 Formule de Rodrigues

Si $\overrightarrow{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on pose $\Lambda_{\overrightarrow{x}} := \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ ‡. Soit $\overrightarrow{k} \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de norme 1.

— La matrice de la rotation d'axe $\overrightarrow{k}$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ est $R_{\overrightarrow{k},\theta} = I_3 + \sin\theta \Lambda_{\overrightarrow{k}} + (1 - \cos\theta)\Lambda^2_{\overrightarrow{k}}$.

— Comme application linéaire, on a :

$$^\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3,\ R_{\overrightarrow{k},\theta}(\overrightarrow{v}) = \cos\theta\, \overrightarrow{v} + \sin\theta\, \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{v} + (1 - \cos\theta)(\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{v})\, \overrightarrow{k}\ .$$

Exemples. $R_{\overrightarrow{e_1},\theta} = R_{1,\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $R_{\overrightarrow{e_3},\theta} = R_{3,\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice. $R = \exp(\theta\Lambda_{\overrightarrow{k}})$.

†. Pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$.

‡. C'est la matrice de $\overrightarrow{v} \mapsto \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{v}$.