c) Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la forme bilinéaire symétrique associée φ_A est un produit scalaire $\Leftrightarrow$ $^\forall 1 \leqslant i \leqslant n$, $\Delta_i(A) = \text{dét}(A_{\alpha\beta})_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant i} > 0$. *Indication. Soit* $A_i = (A_{\alpha\beta})_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant i}$. *Noter* $b = (e_1, ..., c_n)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^n$. *Appliquer le procédé de Gram-Schmidt aux vecteurs* $e_1, ..., e_n$ *et obtenir une base* $b' = (f_1, ..., f_n)$ *orthogonale pour* φ_A. *Alors* $A_i = [\varphi_A]_{(e_1,...e_i)} = {}^tP_iD_iP_i$ *où* P_i *est la matrice de passage de la base* $(f_1, ..., f_i)$ *dans la base* $(e_1, ..., e_i)$ *qui est triangulaire supérieure avec des* 1 *sur la diagonale et* D_i *est la matrice de* φ_A *dans la base* $(f_1, ..., f_i)$ *qui est diagonale car la base* $(f_1, ..., f_i)$ *est orthogonale. Donc* $^\forall i$, $\varphi_A(f_1, f_1)...\varphi_A(f_i, f_i) = \text{dét}D_i = \Delta_i(A)$ ...

Exemple. La matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ définit un produit scalaire car $\Delta_1(A) = 2$, $\Delta_2(A) = 3$, $\Delta_3(A) = 4$, $\Delta_4(A) = 5 > 0$.

III.3 Sous-espaces orthogonaux

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Notation. Soit $X \subseteq E$. On pose $X^\perp = \{y \in E \ : \ ^\forall x \in X, \langle x, y \rangle = 0\}$.

C'est *l'orthogonal* de X.

Proposition

i) $X^\perp = \mathrm{Vect}(X)^\perp$ est un sous-espace de E ;

ii) $0^\perp = E$, $E^\perp = 0$,

iii) $^\forall F \leqslant E$, $F \leqslant F^{\perp\perp}$, $F^\perp = F^{\perp\perp\perp}$, $F + F^\perp = F \oplus F^\perp$,

iv) $^\forall F, G \leqslant E$, $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, $F^\perp + G^\perp \leqslant (F \cap G)^\perp$.

v) si F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^\perp$ et si E est de dimension finie, alors $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$;

vi) Si E est de dimension finie, alors $^\forall F \leqslant E$, $F = F^{\perp\perp}$, $^\forall F, G \leqslant E$, $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

III.4 Projections orthogonales

Soit $E, \langle \cdot, \cdot \rangle$ un espace euclidien.

III.4.1 Définition

Soit $F \leqslant E$. Soit $x \in E$. Soient $x_1 \in F$, $x_2 \in F^\perp$ tels que $x = x_1 + x_2$. On pose $p_F(x) = x_1$. C'est la *projection orthogonale de x sur F.*

Remarque. Soient $x, y \in E$. Alors $y = p_F(x) \Leftrightarrow y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.

Exercice. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. Alors p est une projection orthogonale $\Leftrightarrow$ $p^2 = p$ et $\ker p \perp \mathrm{im}\, p$.

III.4.2 Formule

Si $f_1, ..., f_k$ est une base orthonormale de F, alors $p_F(x) = \langle x, f_1 \rangle f_1 + ... + \langle x, f_k \rangle f_k$.

III.4.3 Distance à un sous-espace

Soit $x \in E$, alors $d(x, F) = \inf_{y \in F} ||x - y|| = ||x - p_F(x)||$.

Proposition. (**Matrice d'une projection orthogonale.**) Soit p_F la projection orthogonale sur F. Si $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale de E, alors

$$[p_F]_{\mathscr{B}} = B({}^tBB)^{-1t}B$$

où $B = (\langle e_i, f_j\rangle)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant k}} \in \mathscr{M}_{nk}$ est la matrice d'une base $(f_1, ..., f_k)$ quelconque de F dans la base $\mathscr{B}$.

Démo. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $[f]_{\mathscr{B}} = B({}^tBB)^{-1t}B$. Soient $x \in E$, $y \in F$. Alors il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{k1}(\mathbb{R})$tels que $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$, $y = y_1f_1 + ... + y_kf_k$.

Alors

$$\begin{aligned}\langle x - f(x), y\rangle &= {}^t(X - B({}^tBB)^{-1t}BX)BY \\ &= {}^tXBY - {}^tXB\underbrace{({}^tBB)^{-1t}BB}_{=I_k}Y \\ &= {}^tXBY - {}^tXBY = 0\ .\end{aligned}$$

C'est vrai pour tout $y \in F$ donc $x - f(x) \in F^\perp \Rightarrow f(x) = p_F(x)$.

Q.e.d.

Exemple. Si $E = \mathbb{R}^n$, si d est une droite, alors $p_d = \frac{v{}^tv}{{}^tvv}$ où $v \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$ est le vecteur des coordonnées d'un vecteur directeur de d.