

II.3 Formes quadratiques (définies) positives

Soit $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique. On dit que q est *positive* (respectivement *définie positive*) si $\forall x \in E, q(x) \geq 0$ (respectivement, $\forall 0 \neq x \in E, q(x) > 0$).

On dit que q est *négative* (respectivement *définie négative*) si $\forall x \in E, q(x) \leq 0$ (respectivement, $\forall 0 \neq x \in E, q(x) < 0$).

Exercice. Si q est de signature (r, s) , alors r est la dimension maximale d'un sous-espace $F \leq E$ tel que $q|_F$ est définie positive.

Remarque. q définie positive $\Leftrightarrow B_q$ produit scalaire.

III Espaces euclidiens

Définitions.

- Un espace *préhilbertien* est un couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ où E est un $\mathbb{R}$ –espace vectoriel et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E .
- Un espace *euclidien* est un couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ où E est un $\mathbb{R}$ –espace vectoriel de dimension finie et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E .

Exemple. $\mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire usuel.

III.1 Bases orthogonales

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Définitions.

- a) On dit que $x, y \in E$ sont *orthogonaux* si $\langle x, y \rangle = 0$.
- b) Une base *orthogonale* de E est une base $(e_1, \dots, e_n)$ telle que $\forall i \neq j, \langle e_i, e_j \rangle = 0$.
- c) Une base *orthonormale* ou *orthonormée* de E est une base $(e_1, \dots, e_n)$ telle que $\forall i \neq j, \langle e_i, e_j \rangle = 0, \forall i, \langle e_i, e_i \rangle = 1$.

Théorème. Si E est un espace euclidien, alors E admet une base orthogonale. En particulier E admet une base orthonormale.

Exercices.

- 1) (*Théorème de Pythagore*) Soient $x, y \in E$. Montrer que $\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
- 2) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs **non nuls** de E telle que $\forall i \neq j, \langle e_i, e_j \rangle = 0$. Vérifier que les e_i sont linéairement indépendants.

- 3) Trouver une base orthonormale pour $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ avec le produit scalaire usuel.

III.2 Procédé de Gram-Schmidt

Théorème. Soit E un espace euclidien de base $(e_1, \dots, e_n)$. Il existe une unique base $(f_1, \dots, f_n)$ de E telle que

- (i) $\forall 1 \leq i \leq n, f_i = e_i \text{ mod } \langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle$;
- (ii) la base $(f_1, \dots, f_n)$ est orthogonale.

Démo. On définit par récurrence :

$$f_1 = e_1, \forall i > 1, f_i = e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle e_i, f_k \rangle}{\langle f_k, f_k \rangle} f_k .$$

Remarques. En particulier, la base $(\frac{f_1}{\|f_1\|}, \dots, \frac{f_n}{\|f_n\|})$ est orthonormale.

Exercices.

- a) Si $e_1, \dots, e_n$ est une base orthonormale de E , alors $\forall x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \in E, \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.
- b) Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base $(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4) = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ de $\mathbb{R}[X]_{\leq 4}$ avec le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^\pi f(\cos x)g(\cos x)dx$.

$$\begin{aligned} f_0 &= e_0 = 1, f_1 = e_1 - \frac{\langle e_1, f_0 \rangle}{\langle f_0, f_0 \rangle} f_0 = X - \frac{\int_0^\pi \cos x dx}{\int_0^\pi dx} 1 = X, f_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} f_1 - \\ &\frac{\langle e_2, f_0 \rangle}{\langle f_0, f_0 \rangle} f_0 = X^2 - \frac{\int_0^\pi \cos^3 x dx}{\int_0^\pi \cos^2 x dx} X - \frac{\int_0^\pi \cos^2 x dx}{\int_0^\pi dx} 1 = X^2 - \frac{1}{2}, f_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, f_2 \rangle}{\langle f_2, f_2 \rangle} f_2 - \frac{\langle e_3, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} f_1 - \\ &\frac{\langle e_3, f_0 \rangle}{\langle f_0, f_0 \rangle} f_0 = X^3 - \frac{\int_0^\pi \cos^3 x (\cos^2 x - \frac{1}{2}) dx}{\int_0^\pi (\cos^2 x - \frac{1}{2})^2 dx} (X^2 - \frac{1}{2}) - \frac{\int_0^\pi \cos^4 x dx}{\int_0^\pi \cos^2 x dx} X - \frac{\int_0^\pi \cos^3 x dx}{\int_0^\pi dx} 1 = X^3 - \\ &\frac{3}{4} X, f_4 = e_4 - \frac{\langle e_4, f_3 \rangle}{\langle f_3, f_3 \rangle} f_3 - \frac{\langle e_4, f_2 \rangle}{\langle f_2, f_2 \rangle} f_2 - \frac{\langle e_4, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} f_1 - \frac{\langle e_4, f_0 \rangle}{\langle f_0, f_0 \rangle} f_0 = X^4 - \frac{\int_0^\pi \cos^4 x (\cos^3 x - \frac{3}{4} \cos x) dx}{\int_0^\pi (\cos^3 x - \frac{3}{4} \cos x)^2 dx} (X^3 - \\ &\frac{3}{4} X) - \frac{\int_0^\pi \cos^4 x (\cos^2 x - \frac{1}{2}) dx}{\int_0^\pi (\cos^2 x - \frac{1}{2})^2 dx} (X^2 - \frac{1}{2}) - \frac{\int_0^\pi \cos^4 x \cos x dx}{\int_0^\pi \cos^2 x dx} X - \frac{\int_0^\pi \cos^4 x dx}{\int_0^\pi dx} 1 = X^4 - X^2 + \frac{1}{8} \end{aligned}$$