Lemme. Si $F \leq E$, est stable par f , si $ff^* = f^*f$, alors $F^\perp$ est stable aussi par f .

Exercices.

- 1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice avec une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que si A est symétrique, alors $\lambda \in \mathbb{R}$, si A est antisymétrique, alors $\lambda \in i\mathbb{R}$, si A est orthogonale, alors $|\lambda| = 1$.
- 2) Montrer qu'une matrice normale est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
- 3) Dédire du théorème que $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{SO}_n(\mathbb{R})$ est surjective.
- 4) Si ${}^tAA = A{}^tA$, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont imaginaires pures si ${}^tA = -A$, de module 1 si ${}^tA = A^{-1}$.
- 5) Une matrice antisymétrique réelle est de rang pair.

V.4 Décomposition polaire

Théorème. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique $O \in O_n(\mathbb{R})$, une unique $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$.

Démo. Unicité. Si $x \in \ker({}^tAA - \lambda I_n)$, alors $Sx = \sqrt{\lambda}x$.

Existence. Soit S comme ci-dessus. Alors $S^2 = {}^tAA$ et $AS^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ car

$${}^t(AS^{-1})AS^{-1} = S^{-1}{}^tAAS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n .$$

Remarque. La matrice S est un polynôme en la matrice A !

Exercices.

- 1) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer l'existence.
- 2) Dédire du théorème que si $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $A = O_1DO_2$ où $O_1, O_2 \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale à coefficients diagonaux > 0 .
- 3) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$, alors la décomposition polaire de A est donnée par la formule suivante.

$$A = OS$$

avec

$$O = \begin{cases} \frac{A + \text{Com}(A)}{\sqrt{\det(A + \text{Com}(A))}} = \frac{\begin{pmatrix} a+d & b-c \\ c-b & a+d \end{pmatrix}}{\sqrt{(a+d)^2 + (b-c)^2}} & \text{si } \det A > 0, \\ \frac{A - \text{Com}(A)}{\sqrt{-\det(A - \text{Com}(A))}} = \frac{\begin{pmatrix} a-d & b+c \\ b+c & d-a \end{pmatrix}}{\sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2}} & \text{si } \det A < 0 \end{cases} \in O_2(\mathbb{R})$$

et $S = {}^tOA \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.