Cours d'algèbre bilinéaire

I Formes bilinéaires

I.0 Produit scalaire usuel

C'est l'application $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ où si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $x \cdot y = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$.

Proposition.

i) $^\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $y \mapsto x \cdot y$ est linéaire.

ii) $^\forall y \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x \cdot y$ est linéaire.

iii) $^\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot y = y \cdot x$.

iv) $^\forall 0 \neq x \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot x > 0$.

Remarque. $x \cdot y = {}^t x y$.

Notation. Si $x \in \mathbb{R}^n$, soit $||x||_2 = \sqrt{x \cdot x}$.

Théorème de Cauchy-Schwarz. $^\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x \cdot y| \leqslant ||x||_2 ||y||_2$.

Démo.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \sum_i \sum_j (x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - 2 x_i y_i x_j y_j) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (\sum_i x_i^2)(\sum_j y_j^2) + (\sum_j x_j^2)(\sum_i y_i^2) - 2(\sum_i x_i y_i)(\sum_j x_j y_j) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow 2||x||_2^2 ||y||_2^2 \geqslant 2(x \cdot y)^2$$

$$\Leftrightarrow ||x||_2 ||y||_2 \geqslant |x \cdot y| \ .$$

I.1 Formes bilinéaires

Définitions. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

— Une forme *bilinéaire* sur E est une application $b : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que
  — $^\forall x \in E$, $b(x, \cdot) : E \to \mathbb{R}$ est linéaire ;
  — $^\forall y \in E$, $b(\cdot, y) : E \to \mathbb{R}$ aussi.

— On dit que b est *symétrique* si $^\forall x, y \in E$, $b(x, y) = b(y, x)$.

— On dit que b est *antisymétrique* si $^\forall x, y \in E$, $b(x,y) = -b(y,x)$.
— On dit que b est *alternée* si $^\forall x \in E$, $b(x,x) = 0$.

Notations. Soient $Bil(E)$, *resp.* $Bil_S(E)$, *resp.* $Bil_A(E)$, l'ensemble des formes bilinéaires sur E, resp. des formes bilinéaires symétriques, resp. l'ensemble des formes bilinéaires antisymétriques.

Exercices.

1) L'ensemble $Bil(E)$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel pour les lois ordinaires et $Bil(E) = Bil_S(E) \oplus Bil_A(E)$.
2) *Polarisation.*
   i) Soit $b \in Bil_S(E)$. Alors $^\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $b(x,y) = \frac{1}{2}(b(x+y, x+y) - b(x,x) - b(y,y))$.
   ii) Soit $b \in Bil(E)$. Alors b antisymétrique $\Leftrightarrow$ b alternée.

Exemples.

a) Les applications suivantes sont bilinéaires symétriques.
   — $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $(x,y) \mapsto x \cdot y$;
   — $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}AB$;
   — $l_2(\mathbb{N}) \times l_2(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$, $((a_n),(b_n)) \mapsto \sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$ † ;
   — $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $(f,g) \mapsto \int_{-1}^1 fg$.
b) L'application $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto x_1y_2 - x_2y_1$ est bilinéaire antisymétrique.
c) L'application $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto x_1y_2$ est bilinéaire mais ni symétrique ni antisymétrique.

I.2 Matrices

Définition. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. L'application

$$\varphi_A : \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ (X,Y) \mapsto {}^tXAY$$

est bilinéaire.

Exercice. L'application φ_A est symétrique $\Leftrightarrow$ la matrice A est symétrique. L'application φ_A est antisymétrique $\Leftrightarrow$ la matrice A est antisymétrique.

†. $l_2(\mathbb{N}) = \{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ : \ \sum_n a_n^2 < \infty\}$

Notations. Soient $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ : \ {}^tA = A\}$, $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ : \ {}^tA = -A\}$.

Définition. Matrice d'une forme bilinéaire. Soit $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E. Si $\varphi \in Bil(E)$, on pose $[\varphi]_{\mathscr{B}} = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Proposition. Avec les notations de la définition.

$$^\forall x = x_1e_1 + ... + x_ne_n, \ ^\forall y = y_1e_1 + ... + y_ne_n, \ \varphi(x, y) = 4XAY$$

où $A = [\varphi]_{\mathscr{B}}$, $X = {}^t(x_1, ..., x_n)$, $Y = {}^t(y_1, ..., y_n) \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$.

On en déduit le

Théorème. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n, de base $\mathscr{B}$. Alors l'application $\varphi \mapsto [\varphi]_{\mathscr{B}}$ définit des isomorphismes d'espaces vectoriels :

$$Bil(E) \simeq \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$
$$Bil_S(E) \simeq \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$$
$$Bil_A(E) \simeq \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \ .$$

Exemple. Soit $E = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$. Soit $\mathscr{B} = (1, x, x^2)$. Soit $\mathscr{B}' = (1, x, 2x^2 - 1)$. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$, $(f, g) \mapsto \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^\pi f(\cos t)g(\cos t)dt$. Alors

$$[\varphi]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \pi & 0 & \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \\ \frac{\pi}{2} & 0 & \frac{3\pi}{8} \end{pmatrix}, \ [\varphi]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} .$$

I.3 Formules de changement de bases et congruence des matrices

Proposition. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n. Soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Soit $\varphi \in Bil(E)$. Si $A = [\varphi]_{\mathscr{B}}$, $A' = [\varphi]_{\mathscr{B}'}$, $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ †, alors

$$A' = {}^tPAP \ .$$

Définition. On dit que $A, A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont congruentes si $A' = {}^tPAP$ pour une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.

Théorème. Classes de congruences des matrices symétriques et antisymétriques réelles.

†. *c-à-d* si $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$, $\mathscr{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$, alors $P = (p_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où $^\forall 1 \leqslant j \leqslant n$, $e'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij}e_i$; c'est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{B}'$.

i) Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe des entiers $r, s \geqslant 0$ et une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tels que

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} $$

matrice diagonale avec r « 1 » et s « -1 ». De plus, $r + s = \mathrm{rg} A$.

ii) Soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{rg} A = 2d$ est pair et il existe une matrice inversible P telle que

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} J & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} $$

matrice diagonale par blocs avec d blocs $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de taille 2×2.

Démo. Plus tard dans le cours.

I.4 Noyau et rang d'une forme bilinéaire symétrique

Définitions. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. Soit $\varphi \in Bil_S(E) \cup Bil_A(E)$.

— Le *noyau de* φ est $\ker \varphi = \{x \in E \,:\, \forall y \in E,\, \varphi(x, y) = 0\}$.

— Le *rang de* φ, noté rgφ, est la dimension de l'image de l'application linéaire $\gamma_\varphi : E \to E^*$, $x \mapsto \varphi(x,\cdot)$ †.

— On dit que φ est *non dégénérée* si $\ker\varphi = 0$.

Remarque. Si E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n et de base $\mathscr{B}$, si on note $\mathscr{B}^*$ la base duale de E^*, alors $[\varphi]_{\mathscr{B}} = [\gamma_\varphi]_{\mathscr{B},\mathscr{B}^*} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème du rang pour les formes bilinéaires symétriques et antisymétriques. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n. Soit $\varphi \in Bil_S(E) \cup Bil_A(E)$. Alors :

$$n = \dim\ker\varphi + \mathrm{rg}\varphi \ .$$

I.5 Produits scalaires

Définitions. Soit $\varphi \in Bil_S(E)$.

— On dit que φ est *positive* si $^\forall x \in E$, $\varphi(x,x) \geqslant 0$.

— On dit que φ est *négative* si $^\forall x \in E$, $\varphi(x,x) \geqslant 0$.

— On dit que φ est *définie positive si* $^\forall 0 \neq x \in E$, $\varphi(x,x) > 0$.

— On dit que φ est *définie négative* si $^\forall x \in E$, $\varphi(x,x) \geqslant 0$.

Un *produit scalaire* sur E est une forme bilinéaire symétrique et définie positive $\varphi \in Bil(E)$.

Exemple. Le produit scalaire usuel est un produit scalaire.

Exercices.

1) $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

2) $(A,B) \mapsto -\mathrm{Tr}(AB)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

I.6 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique **positive**.

Théorème. Soient $x, y \in E$.

$$|\phi(x,y)| \leqslant \sqrt{\phi(x,x)}\sqrt{\phi(y,y)} \ .$$

Démo.

†. On note $E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$.

Soit $A = \begin{pmatrix} \phi(x,x) & \phi(x,y) \\ \phi(y,x) & \phi(y,y) \end{pmatrix}$. On a :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ (\lambda,\mu)A\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \phi(\lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y) \geqslant 0\ .$$

Donc si $v \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur propre de A pour une valeur propre $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$^t vAv = \alpha^t v.v \geqslant 0 \Rightarrow \alpha \geqslant 0\ .$$

Mais alors comme le déterminant est le produit des valeurs propres

$$\text{dét}A \geqslant 0 \Rightarrow \phi(x,x)\phi(y,y) - \phi(x,y)^2 \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\phi(x,x)}\sqrt{\phi(y,y)} \geqslant |\phi(x,y)|\ .$$

Corollaire. Si ϕ est un produit scalaire, si on pose $||x||_\phi = \sqrt{\phi(x,x)}$ pour tout $x \in E$, alors l'application $E \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $x \mapsto ||x||_\phi$ est une *norme*, *c-à-d*

$i)\forall x \in E,\ ||x||_\phi \geqslant 0. ii) ||x||_\phi = 0 \Leftrightarrow x = 0. iii)\forall x, y \in E,\ ||x+y||_\phi \leqslant ||x||_\phi + ||y||_\phi$.

Exercice. **Identité du prallélogramme.** $\forall x, y \in E$, $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$.

I.7 Produit scalaire hermitien

Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel.

Définitions.

a) On dit que l'application $E \times E \to \mathbb{C}$, $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ est une *forme sesquilinéaire* si

   (i) $\forall x \in E$, $E \to \mathbb{C}$, $y \mapsto \langle x,y\rangle$ est linéaire ;

   (ii) $\forall y \in E$, $E \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \langle x,y\rangle$ est *antilinéaire* † ;

b) on dit que c'est une forme sesquilinéaire hermitienne si de plus

$$(iii)\ \forall x, y \in E,\ \langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}\ ;$$

†. *c-à-d* $\forall x, x' \in E$, $\langle x + x', y\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x',y\rangle$, $\forall x \in E$, $\forall t \in \mathbb{C}$, $\langle tx, y\rangle = \bar{t}\langle x,y\rangle$.

c) on dit que c'est un produit scalaire hermitien si de plus

$$(iv)\ ^\forall x \in E,\ \langle x, x\rangle > 0\,.$$

Exemples.

a) $(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$ est une forme hermitienne sur $\mathbb{C}^n$.

b) $(f, g) \mapsto \int_{-1}^{1} \overline{f} g$ est une forme hermitienne sur $\mathbb{C}[X]$.

Exercices.

1) Notons $\langle x, y\rangle = \alpha(x, y) + i\beta(x, y)$ avec $\alpha(x, y),\ \beta(x, y) \in \mathbb{R}$ pour tous $x, y \in E$. Vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme sesquilinéaire hermitienne $\Leftrightarrow$ α est bilinéaire symétrique et β est bilinéaire antisymétrique.

2) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Vérifier que $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $(X, Y) \mapsto {}^t X A Y$ est une forme sesquilinéaire hermitienne $\Leftrightarrow$ ${}^t\overline{A} = A$.

fin du cours du 22 janvier