VII.4 Isométries affines

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien, *c-à-d* $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est une espace euclidien.

Théorème. Soit $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application telle que

$$^{\forall}M, N \in \mathcal{E},\ ||\overrightarrow{T(M)T(N)}|| = ||MN||\ .$$

Alors T est une transformation affine bijective.

On dit que T est une *isométrie affine.*

Démo. l suffit de démontrer que T est affine car alors $\overrightarrow{T} \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$ est inversible et donc T est bijective *(exo)*.

Supposons que $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire usuel. On a $^{\forall}x, y \in \mathbb{R}^n$, $||T(x) - T(y)|| = ||x - y||$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, $0 < \lambda < 1$. Soit $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$.

Alors

$$||z - x|| = (1 - \lambda)||x - y|| \Rightarrow ||T(z) - T(x)|| = (1 - \lambda)||T(x) - T(y)||$$

$$||z - y|| = \lambda||x - y|| \Rightarrow ||T(z) - T(y)|| = \lambda||T(x) - T(y)||$$

$$\Rightarrow ||T(x) - T(y)|| = ||T(x) - T(z)|| + ||T(z) - T(y)||$$

$$\Rightarrow \exists\, s > 0,\ T(z) - T(y) = s(T(x) - T(z))\ .$$

Mais alors

$$T(z) = sT(x) + (1-s)T(y) \Rightarrow ||T(z) - T(y)|| = s||T(x) - T(y)|| = \lambda||T(x) - T(y)||$$

$$\Rightarrow s = \lambda$$

d'où $T(z) = \lambda T(x) + (1 - \lambda)T(y)$ **Q.e.d.**

Définition. Un *déplacement* est une isométrie f tel que dét $\overrightarrow{f} = 1$; un *antidéplacement* est une isométrie f tel que dét $\overrightarrow{f} = -1$.

VII.5 Isométries affines de $\mathbb{R}^2$

Exemples.

a) Les translations.

b) La rotation de centre $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ R_{y,\theta}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

c) La symétrie orthogonale par rapport à la droite $\Delta_{y,\theta} \subseteq \mathbb{R}^2$ qui passe par $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et qui fait un angle $\frac{\theta}{2}$ avec l'axe des abscisses :
$^\forall M$, $S_{y,\theta}(M) = M'$ tel que $\Delta_{y,\theta}$ est la *médiatrice* de $[M, M']$ †.
C-à-d :

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ S_{y,\theta}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & 1+\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Théorème. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une isométrie ALORS
— f est une translation : $f = t_{\overrightarrow{u}}$ pour un vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$;
— ou f est une rotation : $f = r_{A,\theta}$ pour un point $A \in \mathbb{R}^2$ et un angle $\theta \in \mathbb{R}$;
— ou f est une *réflexion glissée* : $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ s_\Delta$ pour une droite affine $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ et un vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\Delta}$.

Exercice. Trouver le centre de la rotation

$$(x, y) \mapsto \left(-\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{y}{2} + 1\right).$$

VII.6 Isométries affines de $\mathbb{R}^3$

Exemples.

a) La rotation $R_{A,\overrightarrow{k},\theta}(M) = A + R_{\overrightarrow{k},\theta}(\overrightarrow{AM})$ d'angle θ et d'axe $A + \mathbb{R}\overrightarrow{k}$ où $||\overrightarrow{k}|| = 1$, $\theta \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^3$. ‡.

b) La réflexion orthogonale de plan $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^3$ définie par $r_{\mathcal{P}}(M) = M'$ où $\mathcal{P}$ est le plan médiateur de $[MM']$ §

Théorème. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une isométrie. ALORS
— f est une translation : $f = t_{\overrightarrow{u}}$ pour un $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$;
— ou f est un *vissage* : $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ R_{A,\overrightarrow{k},\theta}$ où $A \in \mathbb{R}^3$, $||\overrightarrow{k}|| = 1$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}\overrightarrow{k}$;

†. *c-à-d* $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^2 \ :\ ||Mx|| = ||M'x||\}$
‡. et $^\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{R}_{\overrightarrow{k},\theta}(\overrightarrow{v}) = \cos\theta\overrightarrow{v} + \sin\theta\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{v} + (1-\cos\theta)(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{v})\overrightarrow{k}$.
§. *c-à-d* $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^3 \ :\ ||Mx|| = ||M'x||\}$.

— ou f est une *antirotation* $f = S_{\mathcal{P}} \circ R$ où $S_{\mathcal{P}}$ est une réflexion orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}$, R est une rotation d'axe D avec $D \perp \mathcal{P}$;

— ou f est une *réflexion glissée* : $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ S_{\mathcal{P}}$ où $S_{\mathcal{P}}$ est une réflexion orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}$ avec $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Corollaire. Un déplacement de $\mathbb{R}^3$ avec un point fixe est une rotation. *(Euler)*

Exemple. Soit $f(x, y, z) = (-y + 1, x + 1, z + 1)$. Alors f est un vissage : $f = t_{\overrightarrow{e_3}} \circ R_{A,\overrightarrow{e_3},-\frac{\pi}{2}}$ avec $A = (0, 1, 0)$.

VIII Coniques

VIII.1 Définitions

On appelle *conique* un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ de la forme :

$$\mathscr{C}_F := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ F(x, y) = 0\}$$

où $F(x, y) = \underbrace{ax^2 + 2bxy + cy^2}_{q_F(x,y)} + 2dx + 2ey + f$ pour certaines constantes $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Exemples : les cercles, les ellipses, les hyperboles, les paraboles.

On définit *l'homogénisé* de F par :

$$H_F(x, y, z) := ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = z^2 F\left(\frac{1}{z}(x, y)\right) .$$

Si une conique $\mathscr{C}$ peut être définie par une fonction $F = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$ telle que la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

est inversible, alors on dit que $\mathscr{C}$ est une *conique non dégénérée.*

Remarque. La matrice $\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$ est la matrice de la forme quadratique H_F dans la base canonique.

Exemple. La conique d'équation $x^2 - y = 0$ dans $\mathbb{R}^2$ est non dégénérée car si on pose $F(x, y) := x^2 - y$, alors $H_F(x, y, z) = x^2 - yz$ et la matrice associée est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ qui est inversible.

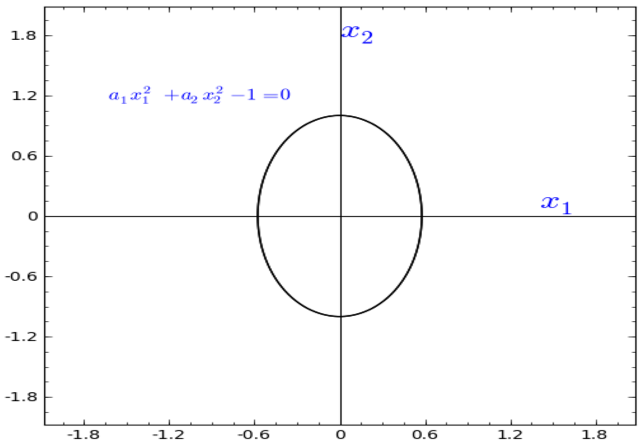


FIGURE 2 – ellipse

Remarque. Une conique, même non dégénérée, peut-être vide : $x^2 + y^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}^2$.

VIII.2 Forme réduite des coniques non dégénérées

Exemples de coniques non dégénérées

— l'ellipse d'équation $F(x_1, x_2) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 - 1$ où $a_1, a_2 > 0$,

— l'hyperbole déquation $F(x_1, x_2) = a_1x_1^2 - a_2x_2^2 - 1$ où $a_1, a_2 > 0$,

— la parabole déquation $F(x_1, x_2) = a_1x_1^2 - x_2$ où $a_1 > 0$

sont des coniques non dégénérées (on a $H_F(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 - x_3^2$ de signature $(2, 1)$ dans le premier cas, $H_F(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1^2 - a_2x_2^2 - x_3^2$ de signature $(1, 2)$ dans le deuxième cas et $H_F(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1^2 - x_2x_3$, de signature $(2, 1)$, dans le dernier cas). Nous allons voir qu'à changement de repère orthonormal près ce sont les seules.

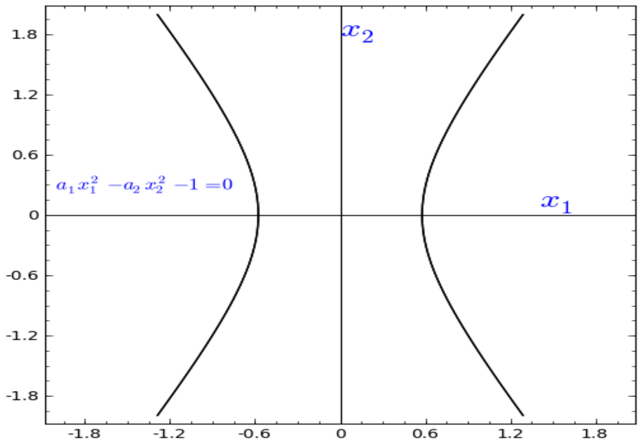


FIGURE 3 – hyperbole

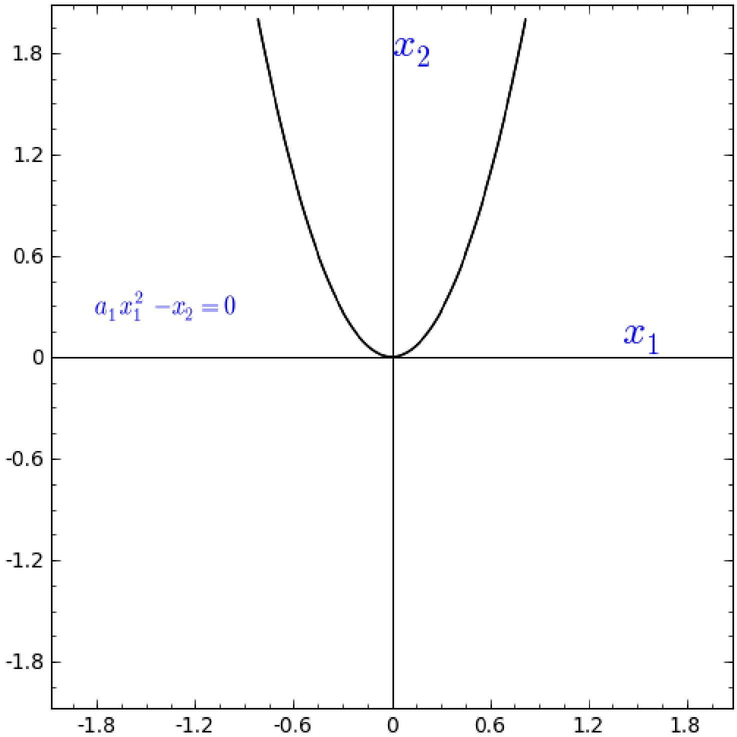


FIGURE 4 – parabole

Théorème VIII.1 *Soit $\mathscr{C}$ une conique dans $\mathbb{R}^2$ d'équation :*

$$F(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \ .$$

On suppose que la matrice $\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$ *est inversible.*

Alors soit $\mathscr{C}$ est vide soit il existe $\wp \in \mathbb{R}^2$, une base orthonormée u_1, u_2 de $\mathbb{R}^2$ et $a_1, a_2 > 0$ tels que :

$$(I) \ \ \wp + x_1u_1 + x_2u_2 \in \mathscr{C} \Leftrightarrow a_1x_1^2 + a_2x_2^2 = 1$$

ou

$$(II) \ \ \wp + x_1u_1 + x_2u_2 \in \mathscr{C} \Leftrightarrow a_1x_1^2 - a_2x_2^2 = 1$$

ou

$$(III) \ \ \wp + x_1u_1 + x_2u_2 \in \mathscr{C} \Leftrightarrow a_1x_1^2 - x_2 = 0 \ .$$

On dit que les équations à droite du signe $\Leftrightarrow$ sont les équations réduites de la conique $\mathscr{C}$.

FIN DU COURS

Ce qui suit n'a pas été fait en cours.

On dit que les droites $\mathbb{R}u_1$ et $\mathbb{R}u_2$ sont des *directions principales* de $\mathscr{C}$. Ces directions sont uniques si $\mathscr{C}$ n'est pas un cercle (*i.e.* $a_1 \neq a_2$), ce sont les droites propres de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Dans les cas (I) et (II), on dit que $\wp$ est le centre de la conique et on appelle les droites $\wp + \mathbb{R}u_i$ des (les (si $a_1 \neq a_2$)) *axes principaux* de $\mathscr{C}$.

Démo.

Posons $q_F(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, $l(x,y) = 2dx + 2ey$. Soit u_1, u_2 une base orthonormale de vecteurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ associés aux valeurs propres λ_1, λ_2.

On a alors : $q_F(x_1u_1 + x_2u_2) = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2$ pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

On a donc, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$F(x_1u_1 + x_2u_2) = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + l(x_1u_1 + x_2u_2) + f$$

$$= \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + f$$

avec $\alpha_i = l(u_i)$.

Remarque. Si $(\mathfrak{o}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est un repère du plan affine $\mathbb{R}^2$, si $F_1(x_1, x_2) := F(\mathfrak{o} + x_1\overrightarrow{u_1} + x_2\overrightarrow{u_2})$, alors

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R},\ H_{F_1}(x_1, x_2, x_3) = H_F(x_1(\overrightarrow{u_1}, 0) + x_2(\overrightarrow{u_2}, 0) + x_3(o, 1)) \ .$$

Si $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2} \neq \mathbf{0}$, on a :

$$F(x_1u_1 + x_2u_2) = \lambda_1(x_1 + \frac{\alpha_1}{2\lambda_1})^2 + \lambda_2(x_2 + \frac{\alpha_2}{2\lambda_2})^2 + c'$$

pour une certaine constante c'. Si on pose $\mathfrak{o} := -\frac{\alpha_1}{2\lambda_1}u_1 - \frac{\alpha_2}{2\lambda_2}u_2$, on trouve :

$$\begin{aligned} F(\mathfrak{o} + x_1u_1 + x_2u_2) &= F((x_1 - \frac{\alpha_1}{2\lambda_1})u_1 + (x_2 - \frac{\alpha_2}{2\lambda_2})u_2) \\ &= \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + c' \end{aligned}$$

si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. En particulier, $c' = F(\mathfrak{o})$.

Or, si $G(x_1, x_2) := F(\mathfrak{o} + x_1u_1 + x_2u_2) = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + c'$, on a :

$$H_G(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + c'x_3^2 \ .$$

Comme $H_G(x_1, x_2, x_3) = H_F(x_1(u_1, 0) + x_2(u_2, 0) + x_3(o, 1))$, H_G est non dégénérée et donc $c' = F(\mathfrak{o}) \neq 0$.

Donc :

$$\begin{aligned} \mathfrak{o} + x_1u_1 + x_2u_2 \in \mathscr{C} &\Leftrightarrow \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + F(\mathfrak{o}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-\lambda_1}{F(\mathfrak{o})}x_1^2 + \frac{-\lambda_2}{F(\mathfrak{o})}x_2^2 = 1 \quad (*) \ . \end{aligned}$$

Si $\frac{-\lambda_1}{F(\mathfrak{o})}, \frac{-\lambda_2}{F(\mathfrak{o})} > 0$, on pose $a_i = \frac{-\lambda_i}{F(\mathfrak{o})}$. Si $\frac{-\lambda_1}{F(\mathfrak{o})} > 0$, $\frac{-\lambda_2}{F(\mathfrak{o})} < 0$, on pose $a_1 := \frac{-\lambda_1}{F(\mathfrak{o})}$ et $a_2 := \frac{\lambda_2}{F(\mathfrak{o})} > 0$. Si $\frac{-\lambda_1}{F(\mathfrak{o})} < 0$, $\frac{-\lambda_2}{F(\mathfrak{o})} > 0$, on échange u_1 et u_2 et on est ramené au cas précédent. Enfin si $\frac{-\lambda_1}{F(\mathfrak{o})}, \frac{-\lambda_2}{F(\mathfrak{o})} < 0$, l'équation $(*)$ n'a pas de solution donc $\mathscr{C} = \varnothing$.

Remarque. Comment trouver $\mathfrak{o}$?

Réponse. Le point $\mathfrak{o}$ est l'unique point de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie le système :

$$\begin{cases} \partial F_x(\mathfrak{o}) = 0 \\ \partial F_y(\mathfrak{o}) = 0 \end{cases} .$$

En effet, d'après la formule de Taylor, on a :

$$F(\mathfrak{o} + v) = q_F(v) + \left\langle \begin{pmatrix} \partial F_x(\mathfrak{o}) \\ \partial F_y(\mathfrak{o}) \end{pmatrix}, v \right\rangle + F(\mathfrak{o})$$

pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^2$. Donc le point $\mathscr{o}$ vérifie :

$$\left\langle \begin{pmatrix} \partial F_x(\mathscr{o}) \\ \partial F_y(\mathscr{o}) \end{pmatrix}, x_1u_1 + x_2u_2 \right\rangle = 0$$

pour tous $x_1u_1 + x_2u_2 \in \mathbb{R}^2$ donc :

$$\begin{cases} \partial F_x(\mathscr{o}) = 0 \\ \partial F_y(\mathscr{o}) = 0 \end{cases} .$$

De plus, on peut vérifier que ce système a une seule solution.

Si $\boldsymbol{\lambda_1 \neq 0}$ et $\boldsymbol{\lambda_2 = 0}$:

Soit (u_1, u_2) une base de vecteurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ associés aux valeurs propres λ_1, 0.

Comme précédemment, on a :

$$F(x_1u_1 + x_2u_2) = \lambda_1 x_1^2 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + f$$

pour certaines constantes réelles α_1, α_2. Comme $\lambda_1 \neq 0$, on a :

$$F(x_1u_1 + x_2u_2) = \lambda_1(x_1 + \frac{\alpha_1}{2\lambda_1})^2 + \alpha_2 x_2 + c'$$

pour une certaine constante c'.

On pose $\mathscr{o}' := -\frac{\alpha_1}{2\lambda_1}u_1$ et on trouve

$$G(x_1, x_2) := F(o' + x_1u_1 + x_2u_2) = \lambda_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2 + c' \ .$$

Or, H_F est non dégénérée donc H_G aussi. Mais :

$$H_G(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2 x_3 + c' x_3^2$$

qui est une forme quadratique de matrice :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_2}{2} \\ 0 & \frac{\alpha_2}{2} & c' \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Cette matrice doit être inversible donc $\alpha_2 \neq 0$.

On pose alors :

$$\mathscr{o} := -\frac{\alpha_1}{2\lambda_1}u_1 - \frac{c'}{\alpha_2}u_2 \ .$$

On obtient alors :

$$F(\mathscr{o} + x_1u_1 + x_2u_2) = F((x_1 - \frac{\alpha_1}{2\lambda_1})u_1 + (x_2 - \frac{c'}{\alpha_2})u_2)$$
$$= \lambda_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2 \ .$$

Par conséquent, on a :

$$\mathscr{o} + x_1u_1 + x_2u_2 \in \mathscr{C} \Leftrightarrow F(\mathscr{o} + x_1u_1 + x_2u_2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-\lambda_1}{\alpha_2} x_1^2 - x_2 = 0 \ .$$

Quitte à changer u_2 en $-u_2$, on supposera que $\frac{-\lambda_1}{\alpha_2} > 0$. On pose alors $a_1 := \frac{-\lambda_1}{\alpha_2}$.

Remarque. Comment calculer $\mathscr{o}$ dans ce cas ?

Réponse. le point $\mathscr{o}$ est l'unique point de $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$F(\mathscr{o}) = 0 \text{ et } \left\langle \begin{pmatrix} \partial F_x(\mathscr{o}) \\ \partial F_y(\mathscr{o}) \end{pmatrix}, u_1 \right\rangle = 0$$

(exo).

De plus, pour ce point $\mathscr{o} \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$F(\mathscr{o} + x_1u_1 + x_2u_2) = \lambda_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2$$

où $\alpha_2 = \left\langle \begin{pmatrix} \partial F_x(\mathscr{o}) \\ \partial F_y(\mathscr{o}) \end{pmatrix}, u_2 \right\rangle$.

Pour résumer, on a le tableau suivant pour une conique non dégénérée d'équation $F(x, y) = 0$ dans $\mathbb{R}^2$:

$\text{sign}(q_F)$	nature de la conique
$(2, 0)$	$\underset{\text{si sign}(H_F)=(2,1)}{\text{ellipse}}$, $\underset{\text{si sign}(H_F)=(3,0)}{\varnothing}$
$(1, 1)$	hyperbole
$(1, 0)$	parabole

Exemple. On considère la conique $\mathscr{C}$ d'équation :

$$x^2 + xy + y^2 + 4x + 3y + 4 = 0 \ .$$

Pour trouver $\mathscr{o} = (x_0, y_0)$, on résout le système :

$$\begin{cases} \partial_x F(\mathscr{o}) = 0 \\ \partial_y F(\mathscr{o}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 + y_0 + 4 = 0 \\ x_0 + 2y_0 + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_0 = -\frac{5}{3}\,,\ y_0 = -\frac{2}{3}\ .$$

On a de plus, $q_F(x,y) = x^2 + xy + y^2$. On cherche donc les valeurs propres λ_1, λ_2 de la matrice

$$[q_F] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\ .$$

On trouve : $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$. Si (u_1, u_2) est une base orthonormale de vecteurs propres associés à λ_1, λ_2, alors on trouve :

$$F(\mathscr{o} + x_1u_1 + x_2u_2) = F(\mathscr{o}) + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2\ .$$

Donc :

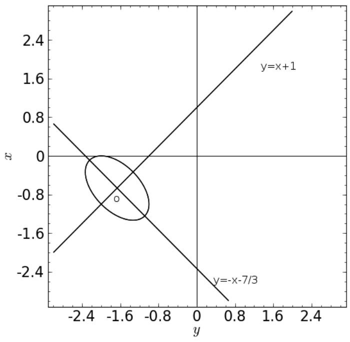
$$\mathscr{o} + x_1u_1 + x_2u_2 \in \mathscr{C} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{9}{2}x_2^2 = 1\ .$$

Donc $\mathscr{C}$ est une ellipse de centre $(-5/3, -2/3)$ et dont les axes principaux sont les droites

$$\mathscr{o} + \mathbb{R}u_1 = (y = -x - 7/3)$$

$$\mathscr{o} + \mathbb{R}u_2 = (y = x + 1)$$



y=x+1
y=-x-7/3
2.4
1.6
0.8
0
-0.8
-1.6
-2.4
x
-2.4 -1.6 -0.8 0 0.8 1.6 2.4
y